

UNTERSUCHUNGEN ZUR GRUPPEN -
THEORETISCHEN BEHANDLUNG DES
NUKLEAREN VIELTEILCHENPROBLEMS

von
Klaus Klingenberg
aus
Bayreuth

1976

1977 # 35

UNTERSUCHUNGEN ZUR GRUPPEN - THEORETISCHEN BEHANDLUNG DES NUKLEAREN VIELTEILCHENPROBLEMS

**Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades**

vorgelegt

von

Klaus Klingenberg

aus

Bayreuth

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 24.11.1976

Vorsitzender der Promotionskommission:	Professor Dr. H. Remmert
Erstberichterstatler:	Professor Dr. M. G. Huber
Zweitberichterstatler:	Professor Dr. H. Ruder

Die vorliegende Arbeit wurde bei Herrn Prof. Dr. M. G. Huber
 Institut für Theoretische Physik III
 Fachbereich Mathematik und Physik
 an der Universität Erlangen-Nürnberg durchgeführt

INHALTSVERZEICHNIS

	EINLEITUNG	1
1.	ALLGEMEINE GRUNDLAGEN	3
1.1.	Definition des nuklearen Vielteilchenproblems	3
1.2.	Die effektive Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung	5
1.3.	Eigenschaften entarteter Systeme	9
2.	BEHANDLUNG EINIGER ENTARTETER EINTEILCHENSYSTEME	19
2.1.	Die (1·s)-Wechselwirkung; Drehimpulskopplung	19
2.2.	Zeeman-Effekt im H-Atom	21
2.3.	Quadrupolartig deformiertes Oszillatorpotential (Anhang A, Anhang B)	23
2.4.	Stark-Effekt im H-Atom (Anhang C)	28
2.5.	Zusammenfassung	43
3.	BEHANDLUNG EINIGER ENTARTETER VIELTEILCHENSYSTEME	46
	Vorbemerkung	46
3.1.	Zur gruppentheoretischen Klassifikation von Vielteilchenzuständen	47
3.2.	Austauschwechselwirkung	48
3.3.	'Pseudomagnetische' Wechselwirkungen	59
3.3.1.	Vorbemerkung	59
3.3.2.	Isoskalare Wechselwirkung	60
3.3.3.	Isovektorielle Wechselwirkung	64
3.4.	Die Quadrupol-Quadrupol-Wechselwirkung (Anhang A, Anhang D)	69
3.5.	Separable Wechselwirkung	74
3.6.	Schlußbemerkungen	78
4.	DIE EFFEKTIVE WECHSELWIRKUNG IN DER (sd)-SCHALE	80
4.1.	Vorbemerkung	80

4.2.	Zentrale und nichtzentrale Anteile der effektiven (sd)-Wechselwirkung (Anhang E)	83
4.3.	Analytische Darstellung der effektiven (sd)-Wechselwirkung (Anhang F)	85
4.4.	Zusammenfassung	87
5.	ZUSAMMENFASSUNG	88
	LITERATURVERZEICHNIS	94
	ANHÄNGE	97
A:	Zur Gruppentheorie des harmonischen Oszillators	97
B:	Zur Quadrupoldeformation des harmonischen Oszillators	104
C:	Zum Stark-Effekt	108
D:	SU(3)-Rechnungen in 17_0 und 18_0	116
E:	Zentrale und nichtzentrale Komponenten der effektiven (sd)-Schalenwechselwirkung	128
F:	Analytische Darstellung der zentralen und nichtzentralen Komponenten der effektiven (sd)-Schalenwechselwirkung	171

EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag leisten zur systematischen Untersuchung der Symmetrien des nuklearen Vielteilchenproblems. Dabei gehen wir von der allgemeinen Tatsache aus, daß jeder Schalenmodellansatz - im Falle nichtabgeschlossener Schalen - zu einer Reihe hochgradig entarteter Vielteilchenkonfigurationen führt. Diese - in der Natur nicht beobachteten Entartungen - werden dann mit Hilfe einer (effektiven) Restwechselwirkung aufgehoben. Dieses Schalenmodellproblem soll im folgenden näher untersucht werden.

Im nuklearen Vielteilchenproblem ist diese Restwechselwirkung - aus verschiedenen Gründen - nicht genau bekannt. Daraus ergeben sich einerseits zusätzliche Schwierigkeiten und Unsicherheiten (etwa im Vergleich zum atomaren Schalenmodell, wo man wenigstens die 'freie' Elektron-Elektron-Wechselwirkung kennt); andererseits kann man aber auch aus der Not eine Tugend machen und diese Unsicherheit dazu benutzen, theoretisch leicht lösbare Modellansätze der effektiven Restwechselwirkung zu testen und zu untersuchen, inwieweit diese Modelle als Extremfälle in den experimentell beobachteten Spektren enthalten sind.

Im ersten Teil der Arbeit werden eine Reihe solcher Modellansätze behandelt und diskutiert. Für solche Untersuchungen erweist es sich als nützlich, gruppentheoretische Methoden zu verwenden. Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen ist eine relativ einfache Beobachtung: Die Lösungen des Schalenmodellproblems weisen Symmetrien auf, die bereits in der effektiven Restwechselwirkung implizit enthalten sind. Dieser Punkt wird in Kapitel 1 näher erläutert. Daraus ergibt sich dann die im Rahmen der vorliegenden Arbeit wohl erstmals explizit formulierte Fragestellung, diese in der Wechselwirkung implizit enthaltenen Symmetrien des Gesamtsystems herauszufinden.

Zur Veranschaulichung der Methode und des physikalischen Bezugs werden zunächst in Kapitel 2 einige i. a. gut bekannte Einteilchensysteme unter obigem Gesichtspunkt behandelt.

Diese Überlegungen werden dann in Kapitel 3 auf einige Modelle von Zweiteilchenwechselwirkungen im Vielteilchensystem angewandt. Diese Systeme werden dann, soweit es dem Autor möglich war, mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden gelöst. In denjenigen Fällen, in denen eine solche Lösung nicht möglich ist, wird das entsprechende gruppentheoretische Problem formuliert.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 4) werden diese Überlegungen dann angewandt zur Untersuchung der effektiven Zweiteilchenwechselwirkung in der sd-Schale. Dabei werden zunächst einige zur Zeit gebräuchliche, realistische, effektive Wechselwirkungen explizit auf ihre Symmetrieeigenschaften hin untersucht (Anhang E) mit dem Ziel, die dominante Symmetrie herauszufinden sowie die diese Symmetrie erhaltenden bzw. brechenden Anteile voneinander zu trennen.

Ausgehend von dieser 'Symmetrieanalyse' der Zweiteilchenwechselwirkung wird dann eine explizite analytische Darstellung der effektiven sd-Schalenwechselwirkung versucht (Anhang F) mit dem Ziel, die potentiellen Symmetrien des Vielteilchenproblems bereits in der effektiven Zweiteilchenwechselwirkung explizit zum Ausdruck zu bringen und mit den im ersten Teil untersuchten Modellansätzen in Relation zu setzen.

Eine auf diese Weise bestimmte Wechselwirkung wird dann schließlich zur Berechnung der Spektren einiger typischer sd-Schalenkerne verwandt (^{20}Ne , ^{24}Mg , ^{28}Si).

1. ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

1.1. Definition des nuklearen Vielteilchenproblems

Der Hamiltonoperator H von A -Nukleonen, die über eine Zweiteilchenkraft $V_{NN}(i, k)$ miteinander wechselwirken, ist gegeben durch den Modellansatz:

$$H = \sum_{i=1}^R t_i + \sum_{i < k}^R V_{NN}(i, k) \quad (1.1.1.)$$

wobei $V_{NN}(i, k)$ die (weitgehend unbekannte) freie Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung bezeichnet. Hierbei geht man davon aus, daß die Nukleonen selbst strukturlos sind und nur durch Zweiteilchenkräfte miteinander wechselwirken; der Einfluß der inneren Anregungszustände der Nukleonen wird im Rahmen der konventionellen Niederenergiephysik vernachlässigt, mit dem Argument, daß die entsprechenden Anregungsenergien (> 300 MeV) sehr groß sind im Vergleich zu Kernanregungen.

Bekanntlich ist eine exakte Lösung des Vielteilchenproblems, beschrieben durch den Hamiltonoperator (1.1.1.), nicht möglich. Man muß sich daher mit Näherungsmethoden und Modellen begnügen.

Im folgenden wollen wir vom Schalenmodell als Grundlage für unser heutiges mikroskopisches Verständnis der Kernstruktur ausgehen. Alternative Modellansätze, etwa im Rahmen des Kollektivmodells, sollen in diesem Zusammenhang nicht berücksichtigt werden, obwohl diese eine Reihe typischer Kerneigenschaften beschreiben können. Denn im Gegensatz zu Kollektivmodellen kann man im Schalenmodell direkt die Verbindung zu dem in Gleichung (1.1.1.) angegebenen mikroskopischen Hamiltonoperator angeben. Das A -Teilchenproblem wird dabei reduziert auf einen inerten Core (abgeschlossene Schalenmodellkonfiguration), an den eine Anzahl von Valenznukleonen gebunden ist; diese sind für die Niederenergieeigenschaften dominant verantwortlich. Die Valenznukleonen sind in einem mittleren Einteilchenpotential U gebunden und wechselwirken miteinander über eine effektive (Rest-) Wechselwirkung V_{eff} , die im allgemeinen natürlich verschieden von

der freien NN-Wechselwirkung V_{NN} ist. Wir wollen, ausgehend von Gleichung (1.1.1.), diesen Weg kurz skizzieren.

Der Hamiltonoperator H aus (1.1.1.) läßt sich umschreiben zu:

$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h_0(i) = \sum_{i=1}^A (t_i + u(i)) \quad (1.1.2.)$$

$$V = \sum_{i < k}^A V_{NN}(i, k) - \sum_{i=1}^A u(i)$$

V wird als Restwechselwirkung bezeichnet.

Zur Berechnung der Lösungen von H gehen wir von Gleichung (1.1.2.) aus; $\{\phi_i\}$ bezeichne eine vollständige Basis von H_0 . Dann werden wie üblich die Eigenfunktionen ψ von H in dieser Basis entwickelt ⁺⁾ ; mit dem Ansatz:

$$\psi = \sum_k^{\infty} a_k \phi_k \quad (1.1.3.)$$

erhält man:

$$(H - E) \psi = 0 \quad (1.1.4.)$$

$$(H_0 - \bar{E}_k) \phi_k = 0 \quad (1.1.5.)$$

bzw.: $(H_0 + V - E) \sum_k^{\infty} a_k \phi_k = 0$

$$\sum_k^{\infty} a_k (\bar{E}_k - E) \phi_k + V \psi = 0$$

daraus folgt:

$$(E - \bar{E}_i) a_i = \langle \phi_i | V | \psi \rangle \quad (1.1.6.)$$

⁺⁾ Wir verzichten hier darauf, die Eigenfunktionen ψ und Eigenwerte E von H ebenfalls zu indizieren.

$$\text{bzw.: } a_i = \frac{\langle \phi_i | V | \psi \rangle}{E - \bar{E}_i}$$

Mit dieser formalen Lösung kann man jedoch i. a. wenig anfangen, da man zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten und Energien in (1.1.6.) ein unendliches Gleichungssystem lösen muß.

1.2. Die effektive Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Die Tatsache, daß man durch die Wahl von H_0 eine Basis für das Vielteilchensystem festgelegt hat, von der man in konkreten Rechnungen jedoch nur eine endliche Anzahl von Basiszuständen berücksichtigen kann, führt dazu, daß man die Restwechselwirkung durch eine effektive Restwechselwirkung ersetzen muß. D. h. man beschränkt sich auf einen endlich dimensional Modellraum D und benutzt eine effektive Wechselwirkung V_{eff} , die so gewählt wird, daß man die Eigenwerte des Hamiltonoperators (1.1.2.) durch Lösung einer Säkulargleichung im Modellraum erhält. Der Anspruch einer mikroskopischen Theorie der effektiven Wechselwirkung besteht darin, diese aus der freien NN-Wechselwirkung abzuleiten.

Wir wählen also eine endliche Anzahl, d , der ϕ_i aus, die den Modellraum D aufspannen. Die Modellwellenfunktion ψ_D ist dann die Projektion von ψ auf den Modellraum:

$$\psi_D = \sum_{i \in D} a_i \phi_i = P \psi \quad (1.2.1.)$$

wobei der Projektionsoperator, P , gegeben ist durch

$$P = \sum_{i \in D} |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \quad (1.2.2.)$$

Führen wir nun die Greensfunktion, G , ein:

$$G = \sum_{i \notin D} \frac{|\phi_i\rangle \langle \phi_i|}{E - \bar{E}_i} = \frac{Q}{E - H_0} \quad (1.2.3.)$$

sowie den Operator:

$$Q = 1 - P = \sum_{i \notin D} |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$$

dann erhält man aus (1.1.3), (1.1.6.), (1.2.1.) und (1.2.3.):

$$\psi = \psi_D + G V \psi \quad (1.2.4.)$$

Der 'Wellenoperator' Ω wird definiert durch

$$\psi = \Omega \psi_D \quad (1.2.5.)$$

und mit (1.2.4.) folgt:

$$\Omega = 1 + G V \Omega \quad (1.2.6.)$$

Damit erhält man eine effektive Wechselwirkung:

$$V_{\text{eff}} = V \Omega = V + V G V_{\text{eff}} \quad (1.2.7.)$$

mit deren Hilfe Gleichung (1.1.6.) nun zu einer Gleichung im Modellraum wird:

$$(E - \bar{E}_i) a_i = \langle \phi_i | V \Omega | \psi_D \rangle = \langle \phi_i | V_{\text{eff}} | \psi_D \rangle$$

bzw.:

$$(E - \bar{E}_i) a_i = \sum_{j \in D} \langle \phi_i | V_{\text{eff}} | \phi_j \rangle a_j \quad (1.2.8.)$$

Die Modellraumgleichung (1.2.8.) ist eine endliche d-dimensionale Säkulargleichung. Dieses Problem ist beliebig genau lösbar, wenn man nur die Matrixelemente von V_{eff} in der verwendeten Basis von H_0 kennt; die Aufgabe, Gleichung (1.1.6.) zu lösen, ist also jetzt verschoben; die Berechnung von V_{eff} aus Gleichung (1.2.7.) ist offenbar äquivalent zur Lösung des Vielteilchenproblems von Gleichung (1.1.2.) bzw. (1.1.6.). Darum wird es i. a. nur mit einschneidenden Näherungen mög-

lich sein, die effektive Wechselwirkung von Gleichung (1.2.7.) aus V_{NN} zu berechnen.

In diesem Zusammenhang soll noch auf ein weiteres Problem hingewiesen werden:

Die 'wahre' Wellenfunktion ψ eines Zustandes ist wegen Gleichung (1.2.4.) und (1.2.5.) i. a. verschieden von der durch Gleichung (1.2.8.) berechneten Modellraumwellenfunktion ψ_D . Wählt man etwa H_0 als harmonisches Oszillatorpotential und als Modellraum die sd-Schale, so besteht ψ_D für ^{18}O nur aus Zweiteilchenfunktionen, während ψ selbst z. B. beträchtliche 4p2h Beimischungen⁺⁾ besitzen kann. Daher ist es nicht verwunderlich, daß auch bei der Berechnung weiterer physikalischer Observabler, etwa Übergangswahrscheinlichkeiten, mit der Modellraumwellenfunktion effektive Operatoren verwendet werden müssen.

Für das Matrixelement M eines Operators O zwischen zwei Zuständen ψ und ψ' von H erhält man nach Gleichung (1.2.5.):

$$M = \langle \psi' | O | \psi \rangle = \langle \psi'_D | \Omega'^{-1} O \Omega | \psi_D \rangle \\ = \langle \psi'_D | O_{eff} | \psi_D \rangle$$

wobei der effektive Operator O_{eff} gegeben ist durch:

$$O_{eff} = \Omega'^{-1} O \Omega \quad (1.2.9.)$$

Die Berechnung von O_{eff} ist äquivalent zur Berechnung der Wellenoperatoren Ω' und Ω der beteiligten Zustände ψ' und ψ . Wie wir aus Gleichung (1.2.7.) erkennen, ist die Kenntnis dieser Wellenoperatoren auch zur Berechnung von V_{eff} notwendig. Daher ist es einleuchtend, daß Methoden zur Berechnung von V_{eff} auch für effektive Operatoren verwendet werden können.

Schließlich möchten wir noch auf eine weitere Problematik hinweisen:

+)

Hier wird die übliche Abkürzung verwendet:
p bzw. h bezeichnen Teilchen- bzw. Lochzustände

Die durch (1.2.7.) definierte effektive Wechselwirkung ist wegen (1.2.3.) energieabhängig und kann im Prinzip durch Iteration von Gleichung (1.2.7.) in Form einer Störungsreihe zumindest formal berechnet werden. Da diese Energieabhängigkeit von V_{eff} für jeden Zustand des Hamiltonoperators H eine andere effektive Wechselwirkung definiert und folglich Zustände zu verschiedenen Energien i . a. nicht orthogonal sind, ist es natürlich von Vorteil, eine energieunabhängige Formulierung der effektiven Wechselwirkung zu finden. Diese wurde zuerst von B. H. Brandow angegeben (Ref. 1). Auch die Schalenmodellannahme eines Cores mit Valenzteilchen kann man im Rahmen dieser Methode behandeln. V_{eff} wirkt dann nur noch zwischen den Valenzteilchen in Modellraumzuständen.

Während also die theoretischen Voraussetzungen zur Berechnung von V_{eff} gegeben sind, führt jedoch der Versuch, V_{eff} mit Hilfe der Folded-Diagram-Methode (Ref. 1, 2, 3) störungstheoretisch zu berechnen (Ref. 4, 5, 6), zu gewissen Schwierigkeiten, etwa Konvergenzproblemen, die noch ungelöst sind (Ref. 7, 8, 9, 10).

Daher ist es wünschenswert, einen Zugang zur Behandlung des nuklearen Vielteilchenproblems auf einer anderen Basis als der Vielteilchenstörungstheorie zu finden. Es ist das Ziel der Arbeit, einen gangbaren Weg aufzudecken, dessen mathematische Behandlung zu formulieren und gewisse Ansätze zu diskutieren, die in diesem Zusammenhang relevant sind.

Im Laufe dieser Diskussion werden wir Gebrauch machen

- einmal von den bekannten Symmetrieeigenschaften der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung V_{NN}
- zum anderen von den Eigenschaften phänomenologischer Restwechselwirkungen, die bereits erfolgreich in Schalenmodellrechnungen verwendet wurden.

Die zu besprechende Methode stützt sich auf den in der Praxis äußerst wichtigen Spezialfall eines energetisch entarteten Modellraums, D , den wir im nächsten Abschnitt etwas genauer beleuchten wollen.

1.3. Eigenschaften entarteter Systeme

Obwohl die Ausführungen dieses Abschnittes allgemeinere Bedeutung besitzen, wollen wir uns am Beispiel eines A-Fermionensystems orientieren, dessen Behandlung wir ja letztlich anstreben. Wir werden an der entsprechenden Stelle auf eine allgemeine Formulierung zurückkommen.

Zur Berechnung der A-Fermionenzustände im Rahmen des Schalenmodells setzen wir folgendes voraus:

- a) Wir spalten das A-Teilchensystem auf in einen inerten Core und n-Valenzteilchen, die in einem mittleren Einteilchenpotential H_0 gebunden sind, und über eine an dieser Stelle nicht näher zu spezifizierende Wechselwirkung H_{int} miteinander wechselwirken:

$$H = H_0 + H_{int} = \sum_{i=1}^n h_0(i) + H_{int} \quad (1.3.1.)$$

Zur Bezeichnung:

h_0 bezeichnet einen lösbaren Einteilchenhamiltonoperator mit Eigenfunktionen φ_i und Eigenwerten ϵ_i .

$$(h_0 - \epsilon_i) \varphi_i = 0 \quad (1.3.1.a)$$

(h_0 wird in späteren Anwendungen oft als harmonisches Oszillatorpotential angenommen.)

Die Eigenfunktionen φ_i von H_0 sind dann natürlich antisymmetrisierte Produktfunktionen aus den φ_i 's und die Eigenwerte ϵ_i von H_0 sind die Summe der zugehörigen Einteilchenenergien ϵ_i .

$$(H_0 - \epsilon_i) \varphi_i = 0 \quad (1.3.1.b)$$

- b) Die n-Valenzteilchen befinden sich in Zuständen, die in H_0 energetisch entartet sind, d. h. $\epsilon_0^i \equiv \epsilon_0$ für alle Zustände des 'Valenzraumes'.

Beispiele:

- i) In einem kugelsymmetrischen Einteilchenpotential H_0 besetzen alle n -Valenzteilchen Zustände mit den gleichen Einteilchenquantenzahlen (N, l) .
- ii) H_0 ist harmonisches Oszillatorpotential, und die n -Nukleonen befinden sich in Zuständen mit gleichem N , wobei N die Zahl der Oszillatorquanten angibt. Dann ist

$$l = N, N-2, \dots, 0 \text{ oder } 1 \text{ möglich.}$$

Der Konfigurationsraum für die Valenzteilchen (im folgenden wieder als Modellraum bezeichnet) wird also auf alle miteinander in H_0 entarteten Zustände einer Schale beschränkt. Baut man nun n -Fermionen in eine Schale ein und bezeichnet τ die Dimension des durch diese Schale festgelegten Einteilchenraumes, dann gibt es $N(\tau, n) = \binom{\tau}{n}$ antisymmetrische n -Fermionen Zustände, die energetisch miteinander entartet sind. Dieser i. a. sehr hohe Entartungsgrad von Vielteilchenzuständen ist eine Eigenschaft, die allen Schalenmodellen (sowohl für die Elektronenhülle als auch für den Atomkern) gemeinsam ist. Diese Entartung muß durch H_{int} aus Gleichung (1.3.1.) aufgehoben werden.

Der konventionell beschrittene Weg besteht nun darin, die Matrixelemente von H_{int} zwischen Modellraumzuständen durch einen phänomenologischen Ansatz zu erzeugen (bzw. diese aus mikroskopischen Rechnungen zu übernehmen) und den Hamiltonoperator (1.3.1.) in der eingeschränkten Basis von H_0 zu diagonalisieren. Die Forderung einer Entartung im Modellraum ist hier nicht notwendig. Jedoch ist man in vielen Fällen aus Dimensionsgründen gezwungen, sich auf entartete Konfigurationen zu beschränken. Einige Beispiele für die dabei auftretenden Dimensionen der zu diagonalisierenden Matrizen werden am Ende dieses Abschnittes angegeben. Es ist klar, daß Zustände, die sich aus der Diagonalisation von Matrizen mit derartigen Dimensionen ergeben, i. a. eine Überlagerung von sehr vielen Basiszuständen sind. Eine analytische Diskussion über physikalische Größen, sprich Quantenzahlen, die die berechneten

Kernzustände charakterisieren, ist in diesen Schalenmodellrechnungen praktisch nicht möglich.

Unter den Voraussetzungen a) und b) läßt sich jedoch eine weitere Eigenschaft von H_{int} und den Lösungen des Hamiltonoperators (1.3.1.) folgern. Diese Eigenschaft ist nicht auf das als Einführung erwählte Beispiel von entarteten Schalenmodellzuständen beschränkt, sondern auch für eine ganze Klasse von physikalischen Systemen gültig. Deshalb wollen wir an dieser Stelle zu einer allgemeineren Formulierung übergehen.

Betrachten wir ein quantenmechanisches System, das durch einen Hamiltonoperator H

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad (1.3.2.)$$

beschrieben wird. Die Eigenzustände zu H_0 seien bekannt, und das volle Problem, beschrieben durch H , soll durch Diagonalisation von H_{int} in einem Modellraum aus Eigenzuständen zu H_0 gelöst werden. Ferner soll vorausgesetzt werden, daß alle Zustände des Modellraumes energetisch entartet sind, also zum selben Eigenwert E_0 von H_0 gehören. Dann gilt:

Satz 1

Die durch Diagonalisation von H in einer energetisch entarteten Basis von H_0 berechneten Eigenfunktionen von H sind auch Eigenfunktionen von H_{int} .

Der Beweis ist trivial:

Sei d die Dimension des Modellraums und ϕ_i ($i = 1, \dots, d$) bezeichne die miteinander in H_0 entarteten Zustände.

$$H_0 \phi_i = E_0 \phi_i \quad (i = 1, \dots, d)$$

Die Modellraumeigenfunktionen ψ_v zu H mit Eigenwerten E_v ($v = 1, \dots, d$) sind Linear-Kombinationen der ϕ_i :

$$\psi_v = \sum_{i=1}^d a_{vi} \phi_i \quad (v = 1, \dots, d)$$

Dann gilt:

$$H \psi_v = E_v \psi_v$$

$$H_0 \psi_v = \sum_{i=1}^d a_{vi} H_0 \phi_i = E_0 \psi_v$$

Insbesondere also:

$$H_{\text{int}} \psi_v = (H - H_0) \psi_v = (E_v - E_0) \psi_v$$

$$\boxed{H_{\text{int}} \psi_v = (E_v - E_0) \psi_v} \quad (1.3.3.)$$

Wir wollen noch den physikalischen Gehalt von Gleichung (1.3.3.) und damit die Interpretation von Satz 1 etwas detaillierter diskutieren. Obwohl H_0 und H_{int} als Operatoren im vollen Hilbertraum im allgemeinen nicht miteinander kommutieren, besagt Satz 1, daß H_0 und H_{int} als Operatoren auf dem entarteten Modellraum kommutieren (vergleiche auch Kapitel 5). In der Näherung, in der sich die Zustände des durch H beschriebenen Systems durch obige, im entarteten Modellraum gewonnenen Zustände ψ_v beschreiben lassen, erweisen sie sich auch als Eigenfunktion zu H_{int} und dementsprechend muß es eine 'erhaltene' physikalische Größe (approximative Quantenzahl) geben. Wie uns ein Blick auf Gleichung (1.3.3.) sofort zeigt, sind dies die Energien der Zustände ψ_v relativ zur ungestörten ' H_0 -Energie' E_0 . Wir werden jedoch im nächsten Kapitel anhand einiger Beispiele sehen, daß dies nicht die einzige Interpretation ist. Vielmehr entsprechen diese Eigenwerte von H_{int} darüber hinaus auch Eigenschaften der Zustände (sprich Quantenzahlen), die dem System durch die Symmetrie von H_{int} aufgeprägt werden.

Für den Rest dieses Abschnitts wollen wir die allgemeine Diskussion von Satz I wieder verlassen und den Zusammenhang zum nuklearen Vielteilchenproblem herstellen und einige Folgerungen aus Satz I für diesen Fall diskutieren. Es liegt auf der Hand, daß H_{int} aus Gleichung (1.3.1.) bzw. (1.3.2.) nichts anderes als die in Abschnitt 1.2. diskutierte effektive Wechselwirkung V_{eff} für den entarteten Modellraum ist. Als Folgerung aus (1.3.3.) sind die üblicherweise in Schalenmodellrechnungen durch Diagonalisation der $d \times d$ Matrix $\langle \phi_i | V_{\text{eff}} | \phi_j \rangle$ gewonnenen Zustände auch Eigenfunktionen von V_{eff} . Daher muß es eine Basis von H_0 geben, die Eigenbasis zu V_{eff} ist. Die Struktur dieser Eigenbasis ist natürlich eng mit den Eigenschaften von V_{eff} verknüpft. Wir werden sehen, daß das geeignete mathematische Hilfsmittel zur Beschreibung dieser Eigenschaften von V_{eff} die Gruppentheorie darstellt.

Damit stellt sich aber sofort die Frage, welche n -Teilchenoperatoren A gibt es bei gegebener Basis von H_0 , so daß gilt:

$$A \psi_v = a_v \psi_v \quad (1.3.4.)$$

die mit V_{eff} identifiziert werden können und deren Eigenwerte a mit $E_v - E_0$ übereinstimmen. In allen Schalenmodellrechnungen mit phänomenologischen Wechselwirkungen V_{eff} (eine Spinbahnwechselwirkung und etwa sd -Aufspaltung im harmonischen Oszillator soll in V_{eff} incorporiert sein, um die Entartung zu garantieren) wird durch Variation der Parameter des Wechselwirkungsansatzes der Operator A möglichst gut approximiert.

Der Operator A definiert Quantenzahlen a_v , die den Zuständen ψ_v ($v=1, \dots, d$) zugeordnet werden können. Inwieweit diese a_v als approximative Quantenzahlen des Systems betrachtet werden müssen, hängt natürlich davon ab, wie gut der entartete Modellraum eine reale physikalische Situation beschreibt.

Die Randbedingungen und das eigentliche Problem sind, daß die ψ_v Eigenfunktionen zu A sein müssen. Das läuft darauf hinaus, die Basis-

funktionen ϕ_i von H_0 bereits so zu klassifizieren, daß gewisse Symmetrien von $H_0 + V_{\text{eff}}$ sichtbar werden. Um das zu verdeutlichen, sei ein allgemein bekanntes Beispiel angeführt.

Falls H_0 kugelsymmetrisch ist, kann man die ϕ_i so wählen, daß sie Eigenfunktionen zum Gesamtdrehimpuls L^2 der n -Nukleonen sind. Falls $V_{\text{eff}} = L^2$ gilt, ist das Problem gelöst und man erhält:

$$E_v = E_0 + L \cdot (L+1)$$

Dieses Beispiel führt uns auch gleich zur Methode, mit der das Problem attackiert werden kann, nämlich zur gruppentheoretischen Klassifikation. Die ϕ_i so zu wählen, daß sie Eigenfunktionen zu L^2 sind, bedeutet in der Sprache der Gruppentheorie nichts anderes, als sie nach Darstellung D^L der Drehgruppe $SO(3)$ zu klassifizieren. Alle Zustände des zugehörigen Darstellungsraums sind dann Eigenfunktionen zu L^2 , dem Casimiroperator der $SO(3)$, der in obigem Beispiel mit V_{eff} identisch ist. Es ist eine spezielle Eigenschaft dieses einfachen Beispiels, daß die volle Symmetriegruppe von H_0 auch Symmetriegruppe von V_{eff} (oder allgemeiner H_{int} aus (1.3.2.)) ist. Im allgemeinen muß man erwarten, daß V_{eff} (bzw. H_{int}) die Symmetrie des Gesamtsystems auf eine Untergruppe der Symmetriegruppe von H_0 einschränkt.

Die Aufgabe, den Operator A für das nukleare Vielteilchenproblem zu finden, wird natürlich dadurch erschwert, daß die analytische Struktur von V_{eff} nicht bekannt ist. Zur Konstruktion von A und damit einer Lösung von (1.3.4.) lassen sich folgende Wege beschreiten:

- a) Man untersuche, welche Operatoren aus physikalischen Gründen in V_{eff} auftreten können. Zum Beispiel fordert die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses, daß nur Skalare bzgl. der Drehgruppe im direkten Produktraum aus Orts- und Spinraum möglich sind.
- b) Man untersuche, welche Vielteilchenoperatoren in bereits mit Erfolg verwendeten effektiven Wechselwirkungen enthalten sind. Oder anders ausgedrückt, man

kann bereits vorhandene, bewährte V_{eff} auf ihren Symmetriecharakter hin untersuchen und auf diese Weise versuchen, Informationen über die Eigenschaften komplexer Kerne zu erhalten, die üblicherweise in den numerischen Wellenfunktionen verborgen sind.

$\gamma)$ Eine weitere Möglichkeit besteht darin, sich Wechselwirkungen zu konstruieren, die einmal gewisse Symmetrien deutlich enthalten und zum anderen mit gruppentheoretischen Methoden behandelbar sind.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden beide Wege beschritten. Die aus $\alpha)$, $\beta)$ und $\gamma)$ folgenden Operatoren müssen daraufhin untersucht werden, ob sie mit dem Casimiroperator (oder infinitesimalen Operatoren) gewisser Gruppen ($SO(3)$ oder Obergruppen davon) identifiziert werden können. Eine Klassifikation der Basiszustände von H_0 nach Darstellungen dieser Gruppe und die Berechnung der Eigenwerte des zugehörigen Casimiroperators (oder infinitesimalen Operators) lösen dann die Diagonalisation von A auf algebraischem Weg.

Entartungen von Fermionenzuständen:

Abschließend noch einige Bemerkungen zu der am Anfang dieses Abschnitts erwähnten Entartung des n -Teilchensystems. Einem Fermion im Zustand mit Bahndrehimpuls l stehen aufgrund des Spins $2(2l + 1)$ Zustände zur Verfügung (für das Nukleon im Isospinformalismus $4(2l + 1)$). Wegen der Antisymmetrie der Gesamtwellenfunktion von n -identischen Fermionen ist die Gesamtzahl der miteinander entarteten n -Teilchenkonfigurationen gegeben durch:

$$N(l, n) = \binom{2(2l+1)}{n} \quad (1.3.5.)$$

Diese Formel läßt sich sofort auf den Fall mehrerer, miteinander entarteter l -Orbits erweitern, wie es etwa im harmonischen Oszillator der Fall ist.

$$N(l_a, l_b, \dots, n) = \binom{2(2l_a+1) + 2(2l_b+1) + \dots}{n} \quad (1.3.6.)$$

(analog im Isospinformalismus)

Tabelle 1.3.1. demonstriert diese Entartung von Fermionenzuständen für eine Reihe von Konfigurationen, die für konkrete Schalenmodell-rechnungen relevant sind (Isospinfreiheitsgrade sind nicht berücksichtigt).

Tabelle 1.3.1. Zahl der möglichen Konfigurationen $(1)^n$ nach Gleichung (1.3.5.) bzw. (1.3.6.)

$1 \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1=0(s)$	2	1							
$1=1(p)$	6	15	20	15	6	1			
$1=2(d)$	10	45	120	210	252	210	120	45	10
$1=3(f)$	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002
$1=4(g)$	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620
(sd)	12	66	220	495	792	924	792	495	220
(pf)	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960

Da im Isospinformalismus von den $\binom{4(2\ell+1)}{n}$ n-Nukleonenzuständen nur solche mit einem festen Wert von T_z zu einem vorgegebenen Kern gehören, ist es sinnvoller, die möglichen Zustände in einer Konfiguration $(1)^n$ bzw. $(1_a, 1_b)^n$ eines bestimmten Kerns als das Produkt von Protonen- und Neutronenzuständen darzustellen.

Einige Beispiele für (sd)-Schalenkerne sind in Tabelle 1.3.2. angegeben. Da bei ^{28}Si die (sd)-Schale des harmonischen Oszillators zur Hälfte gefüllt ist, ergeben sich wegen der Äquivalenz von Teilchen und Löchern (dem entspricht eine Äquivalenz von Darstellungen der Gruppe $SU(4(21+1))$ für $28 < A < 40$ keine neuen Zustandszahlen.

Tabelle 1.3.2. Anzahl N entarteter Zustände für verschiedene (sd)-Schalenkerne

Kern	Protonen Konfig.	N_{prot}	Neutronen Konfig.	$N_{\text{neutr.}}$	Gesamtzahl N der Zustände
^{20}Ne	$(d)^2$	45	$(d)^2$	45	2 025
	$(sd)^2$	66	$(sd)^2$	66	4 356
^{22}N	$(d)^2$	45	$(d)^4$	210	9 450
	$(sd)^2$	66	$(sd)^4$	495	32 670
^{24}Mg	$(d)^4$	210	$(d)^4$	210	44 100
	$(sd)^4$	495	$(sd)^4$	495	245 025
^{26}Mg	$(d)^4$	210	$(d)^6$	210	44 100
	$(sd)^4$	495	$(sd)^6$	924	457 380
^{28}Si	$(d)^6$	210	$(d)^6$	210	44 100
	$(sd)^6$	924	$(sd)^6$	924	853 776

Es ist klar, daß nicht die volle $N \times N$ Matrix (N = Gesamtzahl der Zustände; vergleiche Tabelle 1.3.2.) diagonalisiert werden muß, sondern die gesamte Matrix wegen Drehimpulserhaltung in eine direkte Summe von Untermatrizen zerfällt, die getrennt diagonalisiert werden können. Immerhin ist aber die Dimension der Matrix der 2^+ -Zustände von ^{24}Mg im uneingeschränkten (sd)⁸-Modellraum etwa 2 000.

Zur Veranschaulichung der Schalenstruktur der Atomkerne und dem damit verbundenen Problem der Entartung betrachten wir uns noch Figur 1.3.1. Im linken Teil der Figur ist das Einteilchenspektrum von h_0 aus Gleichung (1.3.1.a) dargestellt, wobei h_0 als reines Oszillatorpotential angenommen wurde. Das hochgradig entartete Vielteilchenspektrum von H_0 aus Gleichung (1.3.1.b) ist im rechten Teil der Figur

für das Beispiel von 4-Teilchen in einer Oszillatorschale dargestellt. Die jeweils in Klammern angegebenen Zahlen geben den Entartungsgrad an, der aus Gleichung (1.3.6.) im Isospinformalismus berechnet wurde. Diese Figur macht deutlich, wie gewaltig die Entartung selbst bei der relativ harmlosen 4-Teilchenkonfiguration mit wachsender Einteilchenenergie im Oszillator zunimmt.

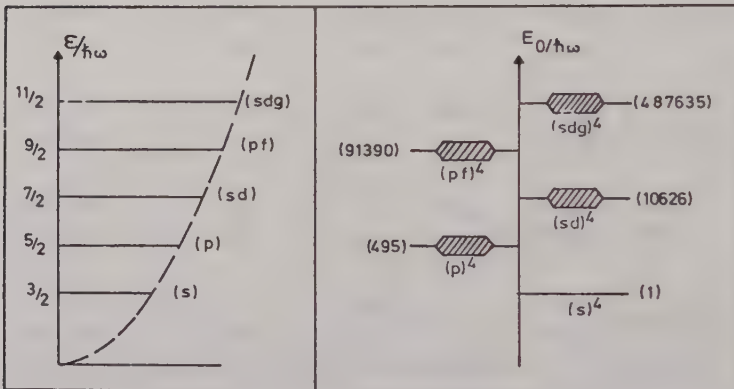


Fig. 1.3.1.: Schalenstruktur der Atomkerne (in einer reinen Oszillatorbasis); links: das Einteilchenspektrum von h (Gleichung (1.3.1.a)); rechts: das Vielteilchenspektrum von H_0 (Gleichung (1.3.1.b)).

2. BEHANDLUNG EINIGER ENTARTETER EINTEILCHENSYSTEME

In diesem Kapitel soll die Anwendung von Satz I auf einige allgemein bekannte physikalische Einteilchensysteme behandelt werden. Dabei wird sich zeigen, daß dieser Satz eng mit der Verwendung abstrakter gruppentheoretischer Methoden in der Quantenmechanik verbunden ist. Während jedoch die analytische Struktur von H_{int} (vgl. (1.3.2.)) in diesem Kapitel stets bekannt ist und damit eine algebraische Diskussion der Eigenschaften von H_{int} ermöglicht, ist diese glückliche Situation im Fall der effektiven Wechselwirkung des nuklearen Vielteilchensystems nicht gegeben. Dennoch werden uns die Beispiele dieses Kapitels als Leitfaden für die Behandlung des nuklearen Vielteilchenproblems dienen und die dazu notwendige Methodik klar herauskristallisieren. Wir verwenden in diesem Kapitel die Bezeichnungen von Gleichung (1.3.2.); daher wird auch ein Einteilchenhamiltonoperator mit H_0 und seine Eigenfunktionen mit ψ (ϕ) bezeichnet.

2.1. (l · s)-Wechselwirkung; Drehimpulskopplung

Das in diesem Zusammenhang wohl bekannteste und einfachste Beispiel stellt die (l·s)-Wechselwirkung dar. Das heißt, wir betrachten die Einteilchen-Schrödingergleichung für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ in einem kugelsymmetrischen Potential H_0 , das nicht von den Spinkoordinaten abhängt. Dann sind die Eigenfunktionen von H_0 ein Produkt aus einer Ortsfunktion und Spinfunktion und durch folgende Quantenzahlen charakterisiert:

- l (Bahndrehimpuls), m_l (z-Komponente des Bahndrehimpuls),
- s (Spin) und m_s (z-Komponente des Spins).

$$H_0 \phi_{\ell m_\ell} \chi_{s m_s} = E_\ell^\circ \phi_{\ell m_\ell} \chi_{s m_s} \quad (2.1.1.)$$

Die Energie E_ℓ° hängt nicht von m_l , s und m_s ab, d. h. jeder Zustand von H_0 ist mindestens $2 \cdot (2l+1)$ -fach entartet. ⁺⁾

⁺⁾ Im Prinzip kann E_ℓ noch von einer weiteren Quantenzahl α abhängen; etwa α = Hauptquantenzahl.

Wollen wir die oben skizzierten, allgemein bekannten Tatsachen nochmals unter gruppentheoretischen Gesichtspunkten formulieren. Aus der Kugelsymmetrie von H_0 folgt, daß die Drehgruppe $SO(3)$ eine Symmetriegruppe von H_0 ist, d. h. die Eigenfunktionen ϕ_{lm} von H_0 bilden eine Basis für irreduzible Darstellungen D^l der $SO(3)$, und alle Zustände, die zur selben Darstellung D^l gehören, sind energetisch entartet. Die als multiplikative Faktor in der Gesamtfunktion auftretenden Spinfunktionen $\chi_{s m_s}$ bilden eine Basis für Darstellungen der Gruppe $SU(2)$. Die Zustände $\phi_{lm} \chi_{s m_s}$ sind somit eine Basis für irreduzible Darstellungen des direkten Produkts $SO(3) \times SU(2)$.

Wenn der Gesamthamiltonoperator H aus (1.3.2.) eine Spinbahnwechselwirkung enthält

$$H = H_0 + C (\underline{l} \cdot \underline{s}) \quad (2.1.2.)$$

(C ist eine Konstante)

dann sind die in (2.1.1.) definierten Eigenfunktionen von H_0 bekanntlich keine Eigenfunktionen zu H . Wenn wir uns auf die miteinander entarteten Zustände zu festem l beschränken, muß es nach Satz I eine Basis geben, die sowohl Eigenbasis zu H_0 als auch zu H_{int} ist. Die unitäre Transformation von der Basis (2.1.1.) auf letztere läßt sich

— entweder durch Diagonalisation des Operators

$$\underline{l} \cdot \underline{s} = \sum_{q=0,\pm 1} (-1)^q l_q s_{-q}$$

— oder durch gruppentheoretische Methoden

bestimmen.

Wir alle wissen, daß diese Transformationskoeffizienten die bekannten Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind. Man erhält eine neue Konstante der Bewegung, den Gesamtdrehimpuls j , und die Energie des Systems hängt von dieser Konstante ab (vergleiche Gleichung (1.3.3.) und die daran anschließende Diskussion). Genauer, die Zustände $\psi_{l s j m}$ dieser neuen Basis sind Eigenfunktionen zum Gesamtdrehimpuls j^2 und sei-

ne z-Komponente j_z . Die ψ_{lsjm} sind ferner Eigenfunktionen zu $H_{int} = (l \cdot s)$ mit Eigenwerten

$$\begin{aligned} (l \cdot s) \psi_{lsjm} &= \\ &= \frac{1}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} \psi_{lsjm} \end{aligned} \quad (2.1.3.)$$

Die oben erwähnten CG-Koeffizienten sind rein gruppentheoretischen Ursprungs. Denn die Spinbahnwechselwirkung $(l \cdot s)$ ist ein Skalar im direkten Produktraum aus Orts- und Spinraum, und daher ist die Gruppe $SO_3(3)$ aller 'Drehungen' im Gesamtraum Symmetriegruppe von $H = H_0 + H_{int}$. Die Basistransformation mittels der CG-Koeffizienten vermittelt den Zerfall von irreduziblen Darstellungen der $SO(3) \times SU(2)$ in irreduzible Darstellungen der Untergruppe $SO_3(3)$. Die Eigenwerte der Spinbahnwechselwirkung sind in (2.1.3.) durch die Eigenwerte der Casimiroperatoren j^2 , l^2 und s^2 der Gruppen $SO_3(3)$, $SO(3)$ und $SU(2)$ ausgedrückt.

Die Spinbahnwechselwirkung stellt also ein einfaches Beispiel dafür dar, wie man die Symmetrien von H_{int} (und H_0) zur gruppentheoretischen Klassifikation der Basis von H_0 ausnutzen kann und die Diagonalisation von H_{int} mittels Casimiroperatoren der beteiligten Gruppen erreicht werden kann.

2.2. Zeeman-Effekt im H-Atom

Hier ist H_0 durch das Coulomb-Potential des Protons gegeben und die Eigenzustände des Elektrons in H_0 seien wie üblich mit ϕ_{nlm_e} bezeichnet (n = Hauptquantenzahl). H_{int} ist die Wechselwirkung des magnetischen Moments μ des Elektrons mit einem homogenen äußeren Magnetfeld:

$$H_{int} = -\mu \cdot \underline{B} \quad (2.2.1.)$$

Um die folgende Diskussion zu vereinfachen und eine möglichst transparente Anwendung von Satz 1 zu erreichen, betrachten wir ein spin-

loses Elektron.^{+) Dann ist $\underline{\mu}$ proportional zum Bahndrehimpuls $\underline{l}$.}

$$\underline{\mu} = \frac{e}{2mc} \cdot \underline{l} \quad (2.2.2.)$$

Ferner legen wir die Quantisierungsachse (z-Achse) in Richtung des Magnetfelds, d. h. $\underline{B} = B \cdot \underline{e}_z$. Dann vereinfacht sich (2.2.1.) zu

$$H_{\text{int}} = - \frac{e}{2mc} B l_z \quad (2.2.3.)$$

Das Problem, Eigenfunktionen zu H_{int} anzugeben, ist trivial, da die $\phi_{n m_l m_s}$ bereits Eigenfunktionen zu l_z sind. Anders ausgedrückt, die Quantenzahlen l bzw. m_l der Zustände $\phi_{n m_l m_s}$ charakterisieren Darstellungen der $SO(3)$ bzw. der Gruppe $SO(2)$ aller Drehungen um die z-Achse. Diese Gruppe $SO(2)$ ist jedoch Symmetriegruppe von H_{int} , d. h. H_{int} ist invariant unter Drehungen um die z-Achse und proportional zum infinitesimalen Operator l_z der $SO(2)$.

+)

Der Einschluß des Spins in diese Überlegungen ist ohne Schwierigkeiten möglich; anstelle von (2.2.2.) hat man

$$\underline{\mu} = \frac{e}{2mc} (g_l \underline{l} + g_s \underline{s})$$

mit $g_l = 1$; $g_s = 2$

Allerdings, im realistischen Fall eines spinbahngekoppelten Systems im Magnetfeld,

$$H' = H_0 + \kappa \underline{l} \cdot \underline{s} - \underline{\mu} \cdot \underline{B}$$

(mit $\kappa \neq 0$) ist es nicht möglich, im Rahmen der hier diskutierten Symmetriegruppen Eigenfunktionen zu H' zu finden:

$$\underline{\mu} = \frac{e}{2mc} (j + s) = \frac{e}{2mc} (2j - l)$$

Es ist nicht möglich, j und l (bzw. s) gleichzeitig diagonal zu machen (sieht man von Spezialfällen $l = 0$ bzw. $s = 0$ ab).

Die Eigenwerte von H_{int} sind dann durch

$$H_{\text{int}} \phi_{n m_\ell} = - \frac{e \hbar}{2 m c} B m_\ell \phi_{n m_\ell} \quad (2.2.4.)$$

gegeben. Wir erkennen aus (2.2.4.), daß der Eigenwert von H_{int} sowohl die Energieverschiebung im Zeeman-Effekt angibt als auch m_ℓ , eine durch die Symmetrie von H_{int} gegebene Konstante der Bewegung, charakterisiert (vergleiche Diskussion im Anschluß an Gleichung (1.3.3.)).

2.3. Quadrupolartig deformiertes Oszillatorpotential (Nilsson-Modell)

Die Grundzustandsspins und Anregungsspektren vielerug-Kerne lassen sich als Einteilchenzustände eines Nukleons erklären, das sich in einem, vom gg-Rumpf erzeugten, deformierten Potential befindet. Der Hamiltonoperator des Nilsson-Modells (Ref. 11), der ein derartiges System beschreibt, lautet:

$$H_N = H_0 + A r^2 Y_{20}(\hat{r}) + B(\underline{\ell} \cdot \underline{s}) + C \ell^2 \quad (2.3.1.)$$

wobei H_0 ein isotropes harmonisches Oszillatorpotential mit Eigenfunktionen $|N \ell m_\ell\rangle$ bezeichnet. (Für eine übersichtlichere und kürzere Schreibweise verwenden wir anstelle der $\phi_{n, p, \dots}$ die Dirac'sche Notation $|n, \beta, \dots\rangle$).

Zunächst diskutieren wir zwei Spezialfälle.

a) Falls $A = 0$ ist, so gilt

$$H_{\text{int}} = B(\underline{\ell} \cdot \underline{s}) + C \ell^2 \quad (2.3.2.)$$

und die Eigenfunktionen zu H_{int} (und H_0) sind die in Abschnitt 2.1. angegebenen, zum Gesamtdrehimpuls j gekoppelten Funktionen: $|l s j m\rangle$

$$|lsjm\rangle = \sum_{m_\ell m_s} (l m_\ell \frac{1}{2} m_s | jm) | N \ell m_\ell \rangle \chi_{s, m_s}$$

und

$$H_{\text{int}} |lsjm\rangle = \left\{ B_{\frac{1}{2}} (j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}) + C l(l+1) \right\} |lsjm\rangle \quad (2.3.3.)$$

Die gruppentheoretische Lösung für die Eigenfunktionen von $H_0 + H_{\text{int}}$ kann also in diesem Fall mit Hilfe der Theorie orthogonaler Gruppen angegeben werden.

- b) Andererseits kann man auch für den Fall $B = C = 0$ aber $A \neq 0$, also

$$H_{\text{int}} = A r^2 Y_{20}(\vartheta) \quad (2.3.4.)$$

mit gruppentheoretischen Methoden die Eigenfunktionen zu H_{int} finden wenn man sich auf eine Oszillatorschale (festes N) beschränkt. Die Existenz einer derartigen Basis ist in diesem Fall nach Satz 1 gesichert, da alle Modellraumzustände (d. h. alle Zustände innerhalb einer Oszillatorschale) energetisch entartet sind.

Im folgenden wird die Konstruktion der oben erwähnten Basis mit Hilfe der Eigenschaften der Gruppe $SU(3)$ beschrieben. Es zeigt sich, daß H_{int} nicht mit Casimiroperatoren der zur Klassifikation der Modellraumzustände benutzten Gruppen (hier $SU(3)$) identifiziert wird, sondern mit einem Operator (Q_0) der $SU(3)$ -Algebra, der in der maximalen Unteralgebra miteinander kommutierender Operatoren der $SU(3)$ -Algebra liegt, also in jeder Darstellung der $SU(3)$ diagonalisierbar ist.⁺⁾

Die Eigenwerte von H_{int} in dieser Basis, die mit $|N \ell K\rangle$ bezeichnet wird, lassen sich rekursiv aus der Kenntnis einfacher $SU(3)$ -Darstellungen auf algebraischem Wege berechnen.

+) Das wohlbekannte und bereits in Abschnitt 2.2. benutzte Analogon dazu ist, daß L_z in einer Basis zur irreduziblen Darstellung D^L der Drehgruppe, d. h. in Zuständen mit definiertem Bahndrehimpuls L , diagonal ist.

Bevor wir obige Ausführungen konkretisieren, müssen noch einige dazu notwendige Eigenschaften der $SU(3)$ -Gruppe und ihrer Lie-Algebra angegeben werden.

Da wir diese in einem späteren Zusammenhang nochmals brauchen, sind diese in Anhang A gesondert zusammengestellt. Wir verwenden in diesem Abschnitt die dort eingeführten Notationen; wir bezeichnen daher den Einteilchenbahndrehimpulsoperator mit L und seine z -Komponente mit L_0 .

Wenden wir uns nun der Aufgabe zu, eine Basis des harmonischen Oszillatorpotentials H_0 zu finden, die Eigenbasis zu H_{int} aus (2.3.4.) ist.

Üblicherweise werden die Eigenfunktionen von H_0 angegeben als $|N\ell m\rangle$, wobei N die Anzahl der Oszillatorquanten, ℓ den Bahndrehimpuls und m die Projektion von ℓ auf die z -Achse bezeichnet. In dieser Basis sind also die Operatoren H_0 , L^2 und L_0 diagonal. Da die $SU(3)$ Symmetriegruppe von H_0 ist (siehe Anhang A), bilden die Zustände $|N\ell m\rangle$ eine Basis für irreduzible Darstellungen der $SU(3)$; in der Notation von Anhang A sind diese irreduziblen Darstellungen durch $(\lambda\mu) = (N0)$ charakterisiert. In der Sprache der Gruppentheorie kommt die Oszillatorbasis $|N\ell m\rangle$ durch eine Klassifikation mittels der Gruppenkette $SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2)$ zustande.

Aber wegen (A 10) können wir genauso gut eine Basis wählen, die die Operatoren Q_0 und L_0 diagonalisiert (zur Definition von Q_0 und L_0 siehe (A 6) und (A 7)). Diese Basis sei mit $|N\epsilon K\rangle$ bezeichnet, wobei ϵ bzw. K die Eigenwerte von Q_0 bzw. L_0 angeben.

$$Q_0 |N\epsilon K\rangle = \epsilon |N\epsilon K\rangle$$

(2.3.5.)

$$L_0 |N\epsilon K\rangle = K |N\epsilon K\rangle$$

Aus der Diskussion von Anhang A folgt, daß die Basis $|N\epsilon K\rangle$ zu der Gruppenkette $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ gehört. Die Eigenwerte ϵ und K kann man aus der Reduktion von Darstellungen der $SU(3)$ bei Beschränkung auf die $SU(2) \times U(1)$ Untergruppe entnehmen.

Für $N = 2$ (d. H. $(\lambda\mu) = (20)$) sind die möglichen Werte von ϵ und K in Anhang B zusammengestellt, wo eine Anwendung der oben geschilderten, abstrakten gruppentheoretischen Ideen und ihre physikalische Interpretation beschrieben wird.

Für die weitere Diskussion ist Gleichung (2.3.5.) ohne Kenntnis numerischer Werte von ϵ und K ausreichend. Mit Hilfe von Gleichung (A 6), (A 4) und (A 2) folgt (vergleiche dazu auch (A 21)):

$$Q_m = -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \, r^2 \, Y_{2m}(\hat{r}) \quad (2.3.6.)$$

Es muß jedoch betont werden, daß Gleichung (2.3.6.) nur innerhalb einer Oszillatorschale gilt.

Aus (2.3.4.) und (2.3.6.) folgt nun unmittelbar

$$H_{int} = A' \cdot Q_0, \quad A' = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot A \quad (2.3.7.)$$

und

$$H_{int} |N\epsilon K\rangle = A' \cdot \epsilon \cdot |N\epsilon K\rangle \quad (2.3.8.)$$

Das bedeutet, mit der Basis $|N\epsilon K\rangle$ haben wir eine Darstellung der Oszillatorzustände gefunden, die H_{int} diagonalisiert. Der entscheidende Punkt war, daß wir von der Gruppenkette $SU(3) \supset SO(3)$ zur Kette $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ übergangen und H_{int} durch den infinitesimalen Operator Q_0 der $U(1)$ ausdrücken konnten. Wir haben in Gleichung (2.3.8.) eine weitere nichttriviale Anwendung von Satz I kennengelernt.

Abschließend noch eine Bemerkung zu der Analogie dieses Problems mit dem in Kapitel 2.2. behandelten:

Die innere Deformation des Rumpfes wirkt auf das einzelne Teilchen wie ein äußeres Feld, d. h. es zwingt ihm seine Symmetrie auf. Beim Zeeman-Effekt war das die Zylindersymmetrie des B-Feldes. Da wir in Gleichung (2.3.1.) eine Quadrupoldeformation annahmen, ist es natürlich, daß die Einteilchenfunktionen durch ein gutes Quadrupolmoment, proportional zu $\mathcal{E}$, (und nicht durch den Bahndrehimpuls l) charakterisiert sind (vergleiche auch Anhang B). Wiederum sehen wir, daß die Eigenwerte von H_{int} nicht nur die Bedeutung einer Energieverschiebung besitzen, sondern auch eine, durch die Symmetrie von H_{int} diktierte, physikalische Eigenschaft der Zustände angeben (vergleiche Diskussion zu Gleichung (1.3.3.)).

Weiterhin sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß dieses Einteilchenquadrupolmoment nur diskrete Werte annehmen kann; dies ist eine natürliche Folge der Endlichkeit des verwendeten Konfigurationsraumes.

Schließlich muß jedoch bemerkt werden, daß Satz 1 auch mit

$$H_{int} = A \gamma^2 \chi_{20}(\varphi) + B \underline{l} \cdot \underline{s} + C l^2 \quad (2.3.9.)$$

anwendbar ist. Jedoch sind weder die Zustände $|N \ell m\rangle$ Eigenfunktion zu $A \gamma^2 \chi_{20}(\varphi)$ noch sind die Zustände $|N \ell K\rangle$ Eigenfunktionen zu $B \underline{l} \cdot \underline{s} + C l^2$. Aus Gleichung (2.3.5.) ist klar, daß die Terme $(l_0 \cdot s_0)$ und l_0^2 von H_N in der Basis $|N \ell K\rangle$ ebenfalls diagonal sind, wenn man berücksichtigt, daß die Gesamtwellenfunktion $|N \ell K\rangle \cdot \chi_{u_s}$ ($u_s = \pm 1/2$) lautet.

Jedoch konnte eine Eigenbasis zum vollständigen H_N mit gruppentheoretischen Mitteln bis jetzt noch nicht angegeben werden. Untersuchungen des vollständigen Problems aus Gleichung (2.3.1.) mit den hier skizzierten Methoden haben jedoch ergeben, daß für übliche Werte der Spinbahnkopplungskonstante B die 'exakten' Lösungen von H_N nahe am hier besprochenen SU(3)-Limit liegen (Ref. 12). Das bedeutet, daß die Quantenzahl $\mathcal{E}$ als approximative bzw. im Nilsson-Sinne asymptotische

Quantenzahl erhalten bleibt. ⁺⁾

2.4. Stark-Effekt im H-Atom

Hierbei ist H_0 wieder der Coulombhamiltonoperator aus Abschnitt 2.2.:

$$H_0 = - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} \quad (2.4.1.)$$

$$H_0 |n\ell m\rangle = E_n^0 |n\ell m\rangle$$

mit

$$E_n^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 m_0 c^2 \frac{1}{n^2}$$

(m_0 bezeichnet die Ruhemasse des Elektrons)

H_{int} ist die Wechselwirkung des elektrischen Dipolmoments $\underline{d}$ mit dem elektrischen Feld $\tilde{\underline{E}}$:

$$H_{\text{int}} = -\underline{d} \cdot \tilde{\underline{E}} \quad ; \quad \underline{d} = e \cdot \underline{r} \quad (2.4.2.)$$

oder falls $\tilde{\underline{E}}$ in z-Richtung gewählt wird:

$$H_{\text{int}} = -e \tilde{E} \cdot z \quad (2.4.3.)$$

Beschränkt man sich auf energetisch entartete Zustände zur selben Hauptquantenzahl n , dann ist eine direkte Folge aus Satz 1, daß H_{int} Eigenzustände zur z-Komponente des elektrischen Dipoloperators erzwingt.

Diese lassen sich natürlich immer gewaltsam durch numerische Diagonalisation von H_{int} in der (endlichen) Basis von H_0 berechnen. Jedoch gibt es auch für diesen Fall eine gruppentheoretische Lösung, die uns eine tiefere physikalische Einsicht gestattet.

⁺⁾ Dieses Problem besitzt ein Analogon bei Schalenmodellrechnungen in der sd-Schale: Auch in diesem Fall führt die Spinbahnwechselwirkung im Einteilchenanteil der effektiven Wechselwirkung zu einer Mischung von $SU(3)$ -Zuständen, die durch die Gruppenkette $SU(3) \supset SO(3)$ klassifiziert sind (Ref. 13).

Obwohl die gruppentheoretische Behandlung dieses Problems völlig andere Gruppen erfordert (12), als im Fall des deformierten Oszillatorpotentials, bestehen einige auffallende Parallelen, die bereits an dieser Stelle vorweggenommen seien.

Die Entartung von Zuständen mit gleicher Hauptquantenzahl n und $l = 0, 1, \dots, n-1$ ist nicht zufällig, sondern darauf zurückzuführen, daß das Coulombpotential (allgemein das $\mathcal{V}_r$ Potential) die Gruppe $SO(4)$ als Symmetriegruppe besitzt.

Die zugehörige Lie-Algebra (Invarianzalgebra von H_0) ist O_4 und besitzt den Rang 2. Die in der elementaren Theorie des Wasserstoffatoms angegebenen Eigenfunktionen $|n\ell m\rangle$ von H_0 sind Eigenfunktionen zu den Operatoren H_0 , L^2 und L_z . n hängt mit dem Eigenwert des O_4 -Casimiroperators zusammen. Natürlich ist H_{int} in dieser Basis nicht diagonal. Wir wollen jedoch zeigen, daß man eine Basis so wählen kann, daß zwei kommutierende Operatoren der O_4 und ein Casimiroperator diagonal sind und gleichzeitig H_{int} diagonalisiert wird. Dieser Basiswechsel ist analog zum Übergang von $|N\ell m\rangle$ zur Basis $|N\epsilon k\rangle$ im vorhergehenden Abschnitt.

Bevor wir uns der Lösung des oben gestellten Problems, Eigenfunktionen zum Dipoloperator z zu konstruieren zuwenden, noch ein kurzer Einschub über die O_4 -Algebra, die eine zentrale Rolle spielen wird.

Eigenschaften der abstrakten O_4 -Algebra

Die folgenden Ausführungen bis einschließlich Gleichung (2.4.15.) sind rein mathematischer Natur und sollen eine gemeinsame Grundlage für die spätere Diskussion des Stark-Effekts schaffen.

Die Erzeugenden (Basisvektoren) der O_4 sind die Operatoren (Ref. 14)

$$D_{\alpha\beta} = -x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} + x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} ; (\alpha, \beta = 1, \dots, 4) \quad (2.4.4.)$$

mit Kommutatoren (Lieprodukten):

$$[D_{\alpha\beta}, D_{\beta\gamma}] = D_{\gamma\alpha} \quad (2.4.5.)$$

(Kommutatoren ohne gemeinsamen Index sind Null.)

Die O_4 besitzt also die Dimension 6.

In quantenmechanischen Anwendungen ist es sinnvoll, zu hermetischen Operatoren $iD_{\alpha\beta}$ überzugehen. Wir definieren

$$L_x = iD_{23} ; L_y = iD_{31} ; L_z = iD_{12} \quad (2.4.6.)$$

$$M_x = iD_{14} ; M_y = iD_{24} ; M_z = iD_{34}$$

Wegen (2.4.5.) besitzen die L's und M's folgende Kommutatoren

$$\underline{L} \times \underline{L} = i\underline{L}$$

$$[L_\alpha, M_\alpha] = 0 \quad (\alpha = x, y, z) \quad (2.4.7.)$$

$$[M_x, M_y] = iL_z \quad (+ \text{ zykl. Permutation})$$

$$[L_x, M_y] = iM_z ; [L_x, M_z] = -iM_y \quad (+ \text{ zykl. Permutation})$$

Die Casimiroperatoren der O_4 sind $L^2 + M^2$, $\underline{M} \cdot \underline{L}$ und $\underline{L} \cdot \underline{M}$. Aber Einsetzen der Definitionen (2.4.6.) und (2.4.4.) zeigt, daß $\underline{M} \cdot \underline{L} = \underline{L} \cdot \underline{M} = 0$. Als kommutierende Erzeugende können die Operatoren L_z und M_z gewählt werden.

Geht man zur komplexen Erweiterung $c \ast O_4$ über, so erhält man einfachere Kommutatoren, die die Struktur der Algebra erkennen lassen.

Wir definieren folgende Operatoren $\underline{K}$ und $\underline{N}$ durch Basiswechsel in $c \ast O_4$:

$$K_z = \frac{1}{2}(L_z + M_z) ; N_z = \frac{1}{2}(L_z - M_z) \quad (2.4.8.)$$

$$K_\pm = \frac{1}{2} \{ (L_x \pm iL_y) + (M_x \pm iM_y) \}$$

$$N_\pm = \frac{1}{2} \{ (L_x \pm iL_y) - (M_x \pm iM_y) \}$$

mit Kommutatoren

$$[K_z, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad ; \quad [K_+, K_-] = 2K_z$$

$$[N_z, N_{\pm}] = \pm N_{\pm} \quad ; \quad [N_+, N_-] = 2N_z \quad (2.4.9.)$$

$$[K_z, N_z] = [K_z, N_{\pm}] = [N_z, K_{\pm}] = 0$$

$$[K_{\pm}, N_{\pm}] = [K_{\pm}, N_{\mp}] = 0$$

K_z und N_z können als Erzeugende der maximalen Unteralgebra kommutierender Operatoren in der Cartan'schen Normalbasis gewählt werden (Ref. 15). +)

Die Kommutatorelationen (2.4.9.) bedeuten:

Die Operatoren $K_z, K_{\pm}$ (bzw. $N_z, N_{\pm}$) spannen Unteralgebren auf, die zu $\mathfrak{so}_3$ (der komplexen Erweiterung der dreidimensionalen Drehimpulsalgebra) isomorph sind.

Da die K 's und N 's kommutieren, ist $\mathfrak{so}_4$ direkte Summe dieser beiden Unteralgebren. Da $\underline{L} \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot \underline{L} = 0$ gilt für den Casimir-operator der $\mathfrak{so}_4$:

$$\underline{L}^2 + \underline{M}^2 = 4K^2 = 4N^2 \quad (2.4.10.)$$

Funktionenräume zur Darstellung der $\mathfrak{so}_4$ -Algebra

Bei Darstellungen der Algebra auf einem Funktionenraum geht entscheidend ein, welche Operatoren als kommutierende Operatoren gewählt werden, deren Eigenwerte das Funktionensystem kennzeichnen. Wir wollen unter diesem Gesichtspunkt noch kurz zwei Funktionensysteme angeben.

+)

In der Theorie der Lie-Algebren wird diese Unteralgebra auch häufig als maximale torale Unteralgebra bezeichnet. Dieser Begriff fällt für halbeinfache Lie-Algebren mit dem der Cartan-Unteralgebra zusammen.

- i) Da M^2 mit L^2 und L_z kommutiert, kommutiert auch der Casimir-operator $L^2 + M^2$ mit L^2 . (Das ist nicht trivial, da L^2 nicht in der O_4 liegt). Wir können also simultane Eigenzustände $|n\ell m\rangle$ zu $L^2 + M^2$, L^2 und L_z konstruieren.

Führt man Polarkoordinaten $(R, \alpha, \theta, \phi)$ in einem vierdimensionalen Raum ein, so ist $R \sin \alpha$ die Projektion von $\underline{R}$ auf die dreidimensionale Hyperebene, und θ, ϕ sind dann gewöhnliche dreidimensionale Polarwinkel. Die Eigenfunktionen zu $L^2 + M^2$, L^2 und L_z sind dann hypersphärische Kugelfunktionen (Ref. 14, 16, 17), die folgendermaßen definiert sind.

$$Y_{n\ell m}(\alpha, \theta, \phi) = i^{n-1-\ell} 2^{\ell+1} \ell! \left[\frac{n(n-\ell+1)}{2\pi(n+\ell)!} \right]^{1/2}. \quad (2.4.11.)$$

$$\cdot \sin^\ell \alpha \cdot C_{n-\ell-1}^{\ell+1}(\cos \alpha) \cdot Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$Y_\ell^m(\theta, \phi)$ bezeichnet eine gewöhnliche sphärische Kugelfunktion und $C_{n-\ell-1}^{\ell+1}$ ist ein Gegenbauer-Polynom. Es gilt neben den gewohnten Eigenwertgleichungen für Y_ℓ^m :

$$(L^2 + M^2) Y_{n\ell m} = (n^2 - 1) Y_{n\ell m} \quad (2.4.12.)$$

$$\ell < n; \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$$

Zu gegebenem n gibt es $\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = n^2$ verschiedene hypersphärische Funktionen $Y_{n\ell m}$. Daran wird bereits deutlich, daß die Algebra O_4 etwas mit der Entartung des Coulomb-Potentials zu tun hat.

- ii) Führt man die Koordinaten (12)

$$x_1 = R \cos \xi \cos \phi \quad ; \quad x_2 = R \cos \xi \sin \phi$$

$$x_3 = R \sin \xi \sin \eta \quad ; \quad x_4 = R \sin \xi \cos \eta$$

ein, so sind die Eigenfunktionen zu

$$K^2 = 1/4 (L^2 + M^2) = N^2, \quad K_z \text{ und } N_z \text{ gegeben durch}$$

$$Z_{nfg} = \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} (-1)^{F+g} d_{gf}^F(2f) \cdot e^{i\{\phi(f+g)+\eta(f-g)\}} \quad (2.4.13.)$$

mit

$$F = 1/2 (n-1)$$

und

$$d_{g,f}^F(2f) = \sqrt{(F+f)!(F+g)!(F-g)!(F-f)!}$$

$$\cdot \sum_t \frac{(-1)^t (\cos f)^{2F+g-f-2t} (\sin f)^{2t-g+f}}{(F+g-t)!(F-f-t)! t! (t-g+f)!}$$

Die unter (i) und (ii) angegebenen Relationen haben uns gezeigt, daß es Funktionensysteme für Darstellungen der $O(4)$ -Algebra gibt, die den beiden Möglichkeiten für die Wahl kommutierender Operatoren, nämlich $L^2 + M^2$, L^2 und L_z in (i) bzw. $L^2 + M^2$, K_z und N_z in (ii) entsprechen. Wir werden die expliziten Darstellungen dieser Funktionen im weiteren nicht benötigen und nur ihre Existenz verwenden. Die Y_{nlm} aus (2.4.11.) sind äquivalent zu den aus der elementaren Theorie des Wasserstoffatoms bekannten Funktionen $|nlm\rangle$ aus (2.4.1.). (Vergleiche dazu auch Schlußbemerkung dieses Abschnitts.) Die Funktionen Z_{nfg} wollen wir im folgenden mit $|nfg\rangle$ abkürzen.

Die folgenden Eigenwertgleichungen sind leicht einzusehen, da nach (2.4.9.) $\underline{K}$ und $\underline{N}$ zwei kommutierende Drehimpulsoperatoren sind und $K^2 = 1/4 (L^2 + M^2)$ gilt.

$$(L^2 + M^2) |nfg\rangle = (n^2 - 1) |nfg\rangle$$

$$K^2 |nfg\rangle = N^2 |nfg\rangle = F(F+1) |nfg\rangle \quad (2.4.14.)$$

mit $F = 1/2(n-1)$

$$K_Z |nfg\rangle = f |nfg\rangle ; (f = -F, -F+1, \dots, F)$$

$$N_Z |nfg\rangle = g |nfg\rangle ; (g = -F, -F+1, \dots, F)$$

Die unitäre Transformation, die beide Basissystem $|nlm\rangle$ und $|nfg\rangle$ ineinander überführt, ist leicht zu finden. Denn es gilt $\underline{L} = \underline{K} + \underline{N}$ und $\underline{K}, \underline{N}$ sind kommutierende Drehimpulsoperatoren (genauer beide spannen O_3 -Algebren auf).

Daher besteht die Transformationsmatrix aus den bekannten Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

$$|nlm\rangle = \sum_{f,g} (Ff Gg |lm) |nfg\rangle \quad (2.4.15.)$$

$$|nfg\rangle = \sum_{l(m)} (Ff Gg |lm) |nlm\rangle$$

Die $SO(4)$ als Symmetriegruppe des Coulomb-Potentials

Nach diesen zwangsweise nur rudimentären Ausführungen über die O_4 -Algebra, wollen wir jetzt den Zusammenhang mit dem Coulombeigenwert-Problem herstellen und zeigen, daß die O_4 -Invarianzalgebra und die $SO(4)$ Symmetriegruppe des Coulomb-Potentials ist. ⁺⁾

Der Hamiltonoperator H_0 für die Relativbewegung im H-Atom ist nach (2.4.1.) gegeben durch (μ = reduzierte Masse)

$$\mu H_0 = 1/2 p^2 - \frac{\hbar C}{r} \quad (2.4.16.)$$

mit $C = \frac{\mu e^2}{\hbar}$

+)

Bei der Fertigstellung der Arbeit wurde die Arbeit von H. G. Becker und K. Bleuler - 'O(4)-Symmetrie und Stark-Effekt des H-Atoms' - in Zeitschrift für Naturforschung 31 a (1976), 517, veröffentlicht.

Es gibt sechs Konstante der Bewegung und ihre Kommutatoren zeigen, daß sie eine O_4 -Algebra aufspannen, vorausgesetzt, daß man sich auf Zustände zu einer festen Energie beschränkt.

Da H_0 kugelsymmetrisch ist, kommutiert H_0 mit den Komponenten von

$$\hbar \underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

(Es ist hier zweckmäßig, die Konstante $\hbar$ einzuführen, da sie dann in den folgenden Kommutatoren nicht mehr auftritt.)

H_0 kommutiert aber auch mit allen Komponenten des Runge-Lenz-Vektors $\underline{A}$:

$$\underline{H} = \frac{1}{2} (\underline{p} \times \underline{L}) - \frac{1}{2} (\underline{L} \times \underline{p}) - C \cdot \frac{\underline{r}}{r} \quad (2.4.17.)$$

oder

$$\hbar \underline{H} = \frac{1}{4} \underline{r} p^2 + \frac{1}{4} p^2 \underline{r} - \frac{1}{2} (\underline{r} \cdot \underline{p}) \underline{p} - \frac{1}{2} (\underline{p} \cdot \underline{r}) \cdot \underline{p} + \mu \underline{r} H_0$$

Diese durch $\underline{A}$ definierten Konstanten der Bewegung sind für die Coulombentartung verantwortlich, und die zugehörige Symmetrie ergibt sich aus den Kommutatoren von $\underline{L}$ mit $\underline{A}$.

Diese sind:

$$\underline{A} \cdot \underline{L} - \underline{L} \cdot \underline{A} = 0 ; \quad (\text{d.h. } A_x L_x - L_x A_x = 0, \text{ usw.}) \quad (a)$$

$$\underline{L} \times \underline{L} = i \underline{L} \quad (2.4.18.) \quad (b)$$

$$\underline{L} \times \underline{A} + \underline{A} \times \underline{L} = 2i \underline{A} \quad (c)$$

Da $\underline{A}$ ein Vektoroperator ist, besitzt $\underline{A}$ mit $\underline{L}$ die Kommutatoren:

$$[L_x, A_y] = i A_z \quad (+ \text{ zykl. Perm.}) \quad (d)$$

Mit (c) folgt aus (d):

$$[L_x, A_z] = -i A_y \quad (+ \text{ zykl. Perm.}) \quad (e)$$

Aus (2.4.17.) folgt weiter:

$$\underline{A} \cdot \underline{L} = 0 \quad (f)$$

$$R^2 = C^2 + 2\mu H_0 (L^2 + 1) \quad (g)$$

$$\underline{R} \times \underline{R} = -2\mu i H_0 \cdot \underline{L} \quad (h)$$

Da wir uns auf (gebundene) Zustände fester Energie beschränken wollen, kann $(-2\mu H_0)$ durch eine Konstante

$$P_0^2 = -2\mu E \quad (E < 0)$$

ersetzt werden.

Definiert man $\underline{M} = \underline{A}/P_0$ dann lassen sich die Kommutatoren (2.4.18.) in folgender Form aufschreiben:

$$\underline{L} \times \underline{L} = i \underline{L}$$

$$[L_x, M_x] = [L_y, M_y] = [L_z, M_z] = 0$$

$$\underline{M} \times \underline{M} = i \underline{L} \quad (2.4.19.)$$

$$[L_x, M_y] = i M_z ; [L_x, M_z] = -i M_y \quad (+ \text{zykl. Perm.})$$

Ein Vergleich mit (2.4.7.) zeigt, daß die Operatoren $\underline{L}$ und $\underline{M}$ eine O_4 -Algebra aufspannen, die Invarianz-Algebra von H_0 ist, da alle Komponenten von $\underline{L}$ und $\underline{M}$ mit H_0 kommutieren. Eine mögliche Wahl, die Eigenfunktionen von H_0 zu charakterisieren, ist also durch die Zustände $|n\ell m\rangle$ gegeben.

Wir nehmen nun analog zu Gleichung (2.4.8.) einen Basiswechsel in der Algebra vor, um zu der in (2.4.9.) definierten Basis zu gelangen.

(Zwischenbemerkung:

Die im folgenden definierten Operatoren $\underline{F}$ bzw. $\underline{G}$ sind nichts anderes als $1/2 (\underline{L} - \underline{M})$ bzw. $1/2 (\underline{L} + \underline{M})$, mit $\underline{M}$ wie in (2.4.19.). $\underline{F}$ bzw. $\underline{G}$ sind dann analog zu den Operatoren $\underline{N}$ bzw. $\underline{K}$ in (2.4.8.) konstruiert. Um jedoch die von E abhängige Definition von $\underline{F}$ bzw. $\underline{G}$ nochmals klar herauszustellen, wollen wir etwas allgemeiner vorgehen.)

Für jede Zahl q sind die Linearkombinationen

$$\underline{J}_1 = \frac{1}{2} \underline{L} + q \underline{R} , \quad \underline{J}_2 = \frac{1}{2} \underline{L} - q \underline{R} \quad (2.4.20.)$$

ebenfalls Konstante der Bewegung. Aus (2.4.18.f) und (2.4.18.g) folgt für $k = 1, 2$:

$$\underline{J}_k^2 = \frac{1}{4} L^2 + q H^2 = q^2 (2\mu H_0 + C^2) + \frac{1}{4} L^2 (1 + 8\mu q^2 H_0) \quad (2.4.21.)$$

$$[\underline{J}_{1\alpha}, \underline{J}_{2\alpha}] = 0 \quad (\alpha = x, y, z) \quad (2.4.22.)$$

$$[\underline{J}_{1x}, \underline{J}_{2y}] = \frac{1}{4} i L_z (1 + 8\mu q^2 H_0) \quad (+\text{zykl. Perm.}) \quad (2.4.23.)$$

$$\underline{J}_k \times \underline{J}_k = i \underline{J}_k - \frac{1}{4} i L \quad (1 + 8\mu q^2 H_0) \quad (2.4.24.)$$

Da wir uns auf den Raum entarteter Eigenfunktionen zu H_0 beschränken, können wir den Operator $1 + 8\mu q^2 H_0$ durch eine Konstante, nämlich $1 + 8\mu q^2 E$ ersetzen, wobei E die Energie der entarteten Zustände bezeichnet. Ein Vergleich der Gleichung (2.4.21.) - (2.4.24.) mit Gleichung (2.4.9.) legt es nahe, die bisher noch freie Zahl q so zu wählen, daß $1 + 8\mu q^2 E = 0$ gilt. (Man beachte, daß dadurch für jedes E eine andere Zahl q definiert wird.) Denn dann sind $\underline{J}_1$ und $\underline{J}_2$ miteinander kommutierende Drehimpulsoperatoren, die nach (2.4.21.) - (2.4.23.) jeweils O_3 -Algebren aufspannen.

Wir wählen daher $q = 1/\sqrt{-8\mu E} = \frac{1}{2p_0}$ und definieren

$$\underline{H}_q = \frac{1}{\sqrt{-8\mu E}} \cdot \underline{H} \quad (2.4.25.)$$

Mit der Umbenennung $\underline{J}_1 \leftrightarrow \underline{G}$, $\underline{J}_2 \leftrightarrow \underline{F}$ wird aus (2.4.20.):

$$\underline{F} = \frac{1}{2} \underline{L} - \underline{H}_q \quad ; \quad \underline{G} = \frac{1}{2} \underline{L} + \underline{H}_q \quad (2.4.26.)$$

(Diese Definition der Operatoren $\underline{F}$ und $\underline{G}$ hängt über q von E ab, läßt sich jedoch für jedes $E < 0$ in der angegebenen Weise vornehmen.)

Dann kommutiert jede Komponente von $\underline{F}$ mit allen Komponenten von $\underline{G}$, d. h.

$$[\underline{F}_x, \underline{G}_x] = [\underline{F}_x, \underline{G}_y] = 0 \quad \text{usw.} \quad (2.4.27.)$$

und es gilt

$$\underline{F} \times \underline{F} = i \underline{F} \quad , \quad \underline{G} \times \underline{G} = i \underline{G} \quad (2.4.28.)$$

Die Relationen (2.4.27.) und (2.4.28.) sind äquivalent zu (2.4.9.), d. h. $\underline{F}$ und $\underline{G}$ spannen O_3 -Algebren auf, deren direkte Summe die Invarianzalgebra O_4 von H_0 ist. Mit $\underline{L}$ und $\underline{M}$ aus (2.4.19.) entsprechen $\underline{F}$ und $\underline{G}$ genau den Operatoren $\underline{N}$ und $\underline{K}$ aus (2.4.8.) (vergleiche auch obige Zwischenbemerkung).

Es sei noch bemerkt, daß der Casimiroperator der O_4 $L^2 + M^2 = 4 F^2$ ist (wegen $\underline{M} = 2 \underline{A}_q$ und $F^2 = G^2$). F^2 besitzt die Eigenwerte $F(F+1)$, wobei F ganz oder halbzahlig sein kann. Daraus folgt, daß der Casimiroperator nur ganzzahlige Eigenwerte besitzt und daher die Symmetriegruppe von H_0 die $SO(4)$ ist.

Aus (2.4.21.) folgt:

$$F(F+1) = G(G+1) = -\frac{1}{4} - \frac{C^2}{8\mu E} \quad (2.4.29.)$$

oder

$$E = -\frac{C^2}{2\mu(2F+1)^2} = -\frac{C^2}{2\mu n^2} = -\frac{e^4\mu}{2\hbar^2 n^2}$$

mit der Abkürzung $n = 2F+1$

Führt man die atomare Energieeinheit

ein, so erhält man die Energien des Wasserstoffatoms in der bekannten Form:

$$E = -\frac{1}{2n^2} E_a \quad (2.4.30.)$$

Einige Bemerkungen zu Gleichung (2.4.30.):

Aus der Tatsache, daß die Operatoren $\underline{F}$ und $\underline{G}$ mit H_0 kommutieren und für jeden festen Wert von E eine O_4 -Algebra aufspannen, folgt, daß die Eigenzustände von H_0 zu dem jeweiligen E eine Basis für irredu-

zible Darstellungen der O_4 und ihrer $O_3 \times O_3$ Unteralgebra bilden. Da der O_3 Casimiroperator F^2 (bzw. G^2) in einer irreduziblen Darstellung nur einen festen Eigenwert besitzt, folgt unmittelbar Gleichung (2.4.30.) für E . Daß wir für $2F+1$ den Buchstaben n gewählt haben, ist reine (jedoch offenkundige) Konvention. Die Tatsache, daß für jeden ganz- oder halbzahligen Wert von F , d. h. für jeden ganzzahligen Wert von n , zugehörige Darstellungen im Wasserstoffatom realisiert sind, ist durch diese Ableitung nicht gesichert. Andererseits folgt aus $F^2 = G^2$ sofort, daß auch nicht alle Darstellungen der $O(4)$, nämlich solche mit $F \neq G$, im Wasserstoffatom realisiert sind.

Gruppentheoretische Lösung des Stark-Effekts

Doch nun zum eigentlichen Ziel, Eigenfunktionen zur z -Komponente des Dipoloperators zu konstruieren.

Im Raum der entarteten Eigenfunktionen zu H_0 läßt sich wegen (2.4.27.) und (2.4.28.) eine Basis wählen, die Eigenbasis zu $F^2 = G^2$ und F_z, G_z ist. Diese entspricht der Basis $|nfg\rangle$ in (2.4.14.) und die Eigenwertgleichungen seien nochmals explizit aufgeführt.

$$(L^2 + M^2) |nfg\rangle = (n^2 - 1) |nfg\rangle \quad (2.4.31.)$$

Aus (2.4.26.) und $\underline{M} = \underline{A} / P_0$ folgt $L^2 + M^2 = 4F^2$ und daher

$$F^2 |nfg\rangle = G^2 |nfg\rangle = F(F+1) |nfg\rangle \quad (2.4.32.)$$

mit

$$F = \frac{1}{2}(n-1)$$

$$F_z |nfg\rangle = f |nfg\rangle \quad (2.4.33.)$$

$$G_z |nfg\rangle = g |nfg\rangle \quad (2.4.34.)$$

Die Matricelemente von $\underline{A}$ lassen sich in der Basis $|nfg\rangle$ einfach berechnen. Für A_z erhält man

$$H_z = \sqrt{-8\mu E} A_{qz} = \sqrt{-2\mu E} (G_z - F_z) = \frac{C}{n} (G_z - F_z)$$

Aus (2.4.33.) und (2.4.34.) folgt weiter:

$$\langle nfg | A_z | n'f'g' \rangle = \frac{C}{n} (g-f) \langle nfg \rangle \cdot \delta_{nn'} \delta_{ff'} \delta_{gg'} \quad (2.4.35.)$$

A_z ist also diagonal bezüglich der Basis $|nfg\rangle$. ⁺⁾

Die Matrixelemente von A_z können mit denen von $\gamma_0 = z$ in Verbindung gebracht werden.

Denn sei B ein beliebiger Operator, dann verschwinden die Matrixelemente von $[B, H_0]$ zwischen Zuständen zum selben Energieeigenwert E_n :

$$\langle n | B H_0 - H_0 B | n \rangle = E_n \langle n | B | n \rangle - E_n \langle n | B | n \rangle = 0 \quad (2.4.36.)$$

da H_0 hermetisch ist. Auf diese Weise läßt sich ein Hypervirialtheorem für $\underline{r}$ und $\underline{A}$ ableiten. Sei

$$\underline{B} = -2\underline{r} + \frac{1}{i\hbar} \{ \underline{r} (\underline{r} \cdot \underline{p}) - 2r^2 \underline{p} \}$$

dann ist

$$[\mu \underline{B}, H] = 3\hbar \underline{A} - 4\mu \underline{r} H \quad (2.4.37.)$$

Aus (2.4.36.) und (2.4.37.) folgt, daß bei Beschränkung auf Zustände gleicher Energie die Operatoren $\underline{r}$ und $\underline{A}$ über folgende Gleichung äquivalent sind:

$$4\mu E \langle nfg | \underline{r} | n'f'g' \rangle = 3\hbar \langle nfg | \underline{A} | n'f'g' \rangle \quad (2.4.38.)$$

Wir möchten nochmals ausdrücklich betonen, daß diese Identifikation (2.4.38.) und die Folgerungen daraus von der Forderung nach energetisch entarteten Zuständen abhängen.

⁺⁾

Für $A_{\pm} = \frac{C}{n}(G_{\pm} - F_{\pm})$ erhält man die Matrixelemente in der Basis $|nfg\rangle$ ebenfalls durch einfache Drehimpulsalgebra. Da sie in diesem Zusammenhang nicht gebraucht werden, möchten wir auf die explizite Angabe weiterer Matrixelemente verzichten.

Insbesondere folgt daraus mit (2.4.35.) für die z-Komponente:

$$\langle nfg | z | nfg' \rangle = - \frac{3\hbar n}{2c} (g-f) \delta_{ff'} \delta_{gg'} \quad (2.4.39.)$$

Das heißt, daß z und mit H_{int} aus (2.4.2.) in der Basis $|nfg\rangle$ diagonal sind. Damit ist die Aufgabe, Eigenfunktionen zu H_0 und H_{int} zu finden, gelöst. Es sind dies die Funktionen $|nfg\rangle$, die zu irreduziblen Darstellungen der $SO(4)$ und ihrer Untergruppe $SU(2) \times SU(2)$ gehören. (Die Tatsache, daß die durch die $O_3 \times O_3$ Algebra beschriebene Untergruppe die Gruppe $SU(2) \times SU(2)$ ist, folgt daraus, daß für F und G auch halbzahlige Werte realisiert sind.) Die volle $SO(4)$ -Symmetrie von H_0 wird also durch H_{int} auf obige Untergruppe eingeschränkt. H_{int} läßt sich nach (2.4.37.) durch die 'Diagonaloperatoren' G_z und F_z ausdrücken:

$$H_{int} = -e\tilde{E}z = e\tilde{E} \frac{3\hbar n}{2c} (G_z - F_z) \quad (2.4.40.)$$

Die entsprechenden Eigenwertgleichungen lauten:

$$H_0 |nfg\rangle = E_n |nfg\rangle \quad (2.4.41.)$$

$$\text{mit } E_n = -\frac{1}{2}n^2 E_a = -\frac{c^2}{2\mu n^2}$$

und

$$\begin{aligned} H_{int} |nfg\rangle &= -e\tilde{E}z |nfg\rangle = \\ &= \frac{3\hbar\tilde{E}en}{2c} (g-f) |nfg\rangle = \end{aligned} \quad (2.4.42.)$$

$$= \frac{3}{2}\tilde{E}e a n (g-f) |nfg\rangle = \frac{3}{2}e^2 \frac{e\tilde{E}}{E_a} n (g-f) |nfg\rangle$$

(a : Bohr'scher Radius

E_a : atomare Energieeinheit)

Auch in diesem Beispiel sehen wir deutlich, daß den Eigenwerten von H_{int} neben der Energieverschiebung eine weitere Bedeutung zukommt. In Analogie zu Abschnitt 2.3. führt das äußere Dipolfeld dazu, daß die Einteilchenfunktionen durch ein gutes Dipolmoment charakterisiert sind, das durch den Eigenwert von H_{int} bestimmt wird; genauer, es ist proportional zu $(g - f)$. Dieses Dipolmoment kann wiederum nur diskrete Werte annehmen, wegen der Endlichkeit des Konfigurationsraumes. Der Bahndrehimpuls l geht als gute Quantenzahl verloren. (Zustände mit definiertem l können aus Paritätsgründen kein von Null verschiedenes statisches Dipolmoment besitzen.)

Der Stark-Effekt bewirkt also nichts anderes, als den Übergang von der Basis $|n\ell m\rangle$ zur Basis $|nfg\rangle$. Würde man die Matrixelemente von z in der Basis $|n\ell m\rangle$ berechnen und die entstehende Matrix diagonalisieren, so berechnet man gerade die $|nfg\rangle$ als Linearkombinationen der $|n\ell m\rangle$. Nach Gleichung (2.4.14.) sind die auftretenden Koeffizienten nichts anderes als Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Wir haben also in einer weiteren nichttrivialen Anwendung von Satz 1 gesehen, wie die gruppentheoretische Klassifikation der Basis von H_0 zur Diagonalisation der Störung H_{int} ausgenutzt werden kann. An dieser Stelle sollte man auf eine weitere Parallele zum deformierten Oszillatorpotential hinweisen. Die Störung $V \sim r^2 Y_{20}$ konnte dort nur dann mit dem Operator Q_0 der $SU(3)$ -Algebra identifiziert werden, wenn man den Definitionsbereich beider Operatoren auf energetisch entartete Zustände (N fest) beschränkt. Ganz analog wird die Identifikation von $\underline{A}$ mit $\underline{r}$ nur im Raum entarteter Zustände möglich, denn $\underline{A}$ kann Zustände verschiedener Energie ($n \neq n'$) nicht verbinden ($[\underline{H}, \underline{A}] = \sigma$), wohl aber der Operator $\underline{r}$.

Eine konkrete Anwendung der oben gezeigten gruppentheoretischen Lösung des Stark-Effekts auf den Fall $n = 3$ ist in Anhang C beschrieben. Dort findet sich ebenfalls eine physikalische Interpretation der Zustände $|nfg\rangle$.

Schlußbemerkung

Abschließend noch einige Worte zu der begrifflich etwas schwer zu durchschauenden $SO(4)$ -Symmetrie des Coulombpotentials. Es sollte also ein Koordinatensystem geben, in dem die vierdimensionale Rotationssymmetrie der Schrödinger-Gleichung sichtbar wird. Dieses wurde erstmals von Fock (Ref. 16) angegeben. Dazu transformiert man die Schrödinger-Gleichung in den Impulsraum und projiziert den dreidimensionalen physikalischen Impulsraum auf eine vierdimensionale Kugel, ähnlich der stereographischen Projektion. Der Radius ρ_0 dieser Kugel hängt dabei von E ab, wie auch die Erzeugende R_q der O_4 von E abhängen. Die Lösungen der entstehenden Gleichung im vierdimensionalen Hyperraum sind gerade die hypersphärischen Kugelfunktionen $\chi_{n\ell m}$. Die gewöhnlichen sphärischen Impulsraumeigenfunktionen $|n\ell m\rangle$ sind die stereographische Projektion der hypersphärischen Kugelfunktionen auf die dreidimensionale physikalische Hyperebene (Ref. 18). Durch Fouriertransformation erhält man die $|n\ell m\rangle$ im Ortsraum.

Eine Realisation der Zustände $|n\ell m\rangle$ kann sowohl im Ortsraum in parabolischen Koordinaten (Ref. 14, 18) als auch im Impulsraum in Toroid-Koordinaten (Ref. 18) angegeben werden.

2.5. Zusammenfassung

(Abschließende Bemerkungen zu Kapitel 2)

Die hier behandelten Beispiele entsprechen zwei verschiedenen allgemeinen Problemen:

a) (1 · s) Wechselwirkung

Hier werden durch H_{int} zwei verschiedene Räume miteinander gekoppelt. Im allgemeinen können diese Räume zu verschiedenen Systemen gehören. H_{int} führt dazu, daß die Energie des Gesamtsystems von der Kopplung abhängt und zu neuen Konstanten der Bewegung führt.

Speziell: Kopplung von Bahn- und Spindrehimpuls; die neue Konstante

der Bewegung ist der Gesamtdrehimpuls j und seine z -Komponente.

b) Zeeman-, Nilsson- und Stark-Effekt

Hier wird die Einteilchenbewegung durch ein äußeres Feld einer bestimmten Symmetrie gestört. Diese Störung erzwingt Eigenzustände des Systems, die die Symmetrie des äußeren Feldes reflektieren. Dementsprechend gibt es Symmetriegruppen mit irreduziblen Darstellungen, für die diese neuen Eigenzustände eine Basis bilden. Die gruppentheoretischen Klassifikationssymbole für diese Zustände entsprechen Quantenzahlen des Systems, durch die sich die vom äußeren Feld erzwungenen Eigenschaften der Zustände charakterisieren lassen.

Zusammenfassung

Basis	Störung	Symmetrie- charakter	Symmetrie- gruppen
kugelsymm. Potential Y_{lm}	homogenes Magnet- feld	M 1	$SO(3)$ $SO(2)$
harm. Oszillator	Quadrupol- deformation	E 2	$SU(3)$ $SU(2) \times U(1)$
H-Atom	elektr. Dipolfeld	E 1	$SO(4)$ $SU(2) \times SU(2)$

An den hier diskutierten Beispielen, deren Reihe sich insbesondere aus dem Bereich der Molekül- und Festkörperphysik noch verlängern ließe, wird deutlich, daß der Übergang von einer Basis zur anderen besonders elegant und physikalisch transparent mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden durchgeführt werden kann. Daneben wird klar, daß die neue Basis Symmetrien aufweist, die durch die äußere Störung verursacht wurden; dementsprechend gibt es - physikalisch rele-

vante - Konstante der Bewegung (etwa Einteilchenmultipolmoment), die nur gewisse diskrete Werte annehmen können (diese sind i. a. mit gruppentheoretischen Methoden einfach zu finden).

Natürlich ist die Anwendbarkeit dieser Symmetrieüberlegungen eingeschränkt, einmal dadurch, daß man sich auf entartete Systeme beschränken muß, zum anderen, daß es (im allgemeinen) nicht ohne weiteres möglich sein wird, mehrere Störungen verschiedenen Symmetriecharakters gleichzeitig zu behandeln (etwa den Einfluß nichtparalleler elektrischer und magnetischer Felder).

Dennoch ist diese gruppentheoretische Vordagonalisierung auch in derartigen Fällen immer von Vorteil:

- sie hebt die energetische Entartung auf und erleichtert daher die Berechnung der Mischung verschiedener Zustände,
- bei Vorliegen mehrerer (inkompatibler) Störungen überwiegt gewöhnlich eine; deren Einfluß kann man dann mit den hier beschriebenen Methoden exakt berücksichtigen, während die andere dann - etwa im Rahmen einer Störungsrechnung - behandelt werden muß.

Aus der Diskussion dieser Beispiele hat sich gezeigt, wieweit man mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden in einfacher und vor allem physikalisch transparenter Weise kommen kann. Wir wollen dieses Kapitel mit der Anmerkung abschließen, daß die hier diskutierten Probleme natürlich vor allem bei Vielteilchenproblemen von großer Bedeutung sind. Denn dort sind die auftretenden Entartungsgrade i. a. so groß (vergleiche auch Abschnitt 1.3.), daß man überhaupt nur mit gruppentheoretischen Methoden eine Vordagonalisierung durchführen kann. (Darunter müssen wir auch die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses bei der Diagonalisation verstehen). Hierbei kommt es natürlich darauf an, die dem physikalischen Problem optimal angepaßte (approximative) Symmetrie zu finden.

Dieses Problem soll im folgenden Kapitel näher diskutiert werden.

3. BEHANDLUNG EINIGER ENTARTETER VIELTEILCHENSYSTEME

Vorbemerkung

Auf der Grundlage der Ergebnisse der vorigen Kapitel wollen wir jetzt die Symmetrien eines Vielnukleonensystems näher untersuchen. Dazu gehen wir von folgendem Vielteilchenhamiltonoperator aus:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

Dabei beschreibe H_0 ein reines Einteilchenproblem:

$$H_0 = \sum_{i=1}^n h_0(i)$$

mit

$$h_0(i) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(i)$$

n bezeichnet die Anzahl der Teilchen und - soweit nicht anders angegeben - soll $V(i)$ beliebiges kugelsymmetrisches Einteilchenpotential sein, das zu einer Schalenstruktur im Spektrum von H_0 führt.

Wiederum wollen wir den Einfluß von H_{int} auf ein in H_0 entartetes Basissystem (Modellraum) untersuchen, ein wichtiger Spezialfall im Bereich der Kernphysik, wie in Kapitel 1 diskutiert wurde. Nach dem Satz aus Kapitel 1.3. sind die Lösungen von H dann auch Eigenfunktionen von H_{int} ; dementsprechend prägt H_{int} dem System gewisse Symmetrien auf, die wir - für einige Spezialfälle - näher studieren wollen.

Der Operator H_{int} beschreibt natürlich 'die' effektive Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung aus Kapitel 1.2. Wegen der dort diskutierten Schwierigkeiten kennt man jedoch V_{eff} nicht hinreichend gut, um eine eindeutige Analyse durchführen zu können. Darum wollen wir im folgenden einige allgemein lösbare Modelle effektiver Wechselwirkungen näher untersuchen im Rahmen einer endlichen, bezüglich H_0 entarteten Basis, insbesondere im Hinblick auf die von H_{int} induzierten Symmetrien des Gesamtsystems. Dabei wollen wir vor allem Wert auf die

exemplarische Lösung von H und auf die gruppentheoretische Beschreibung dieser Systeme legen. Die Ergebnisse dieses Kapitels können dann bei der konkreten Analyse von effektiven Wechselwirkungen quasi als modellhafte Grenzfälle benutzt werden.

Im nächsten Kapitel werden wir dann konkret einige realistische effektive Wechselwirkungen für den Modellraum der (sd)-Schale untersuchen. +)

3.1. Zur gruppentheoretischen Klassifikation von Vielteilchen- zuständen

Ausgehend von der Forderung des Pauliprinzipis nach total antisymmetrischen Zuständen im direkten Produktraum aus Orts-, Spin- und Isospinraum, kann man stets eine Kette von linearen Transformationsgruppen angeben, deren Darstellung zur Klassifikation der Basiszustände von H_0 verwendet werden können. Natürlich sind dann alle Invarianten dieser Gruppen (d. h. solche Größen, die mit allen infinitesimalen Operatoren der Gruppe kommutieren) in dieser Basis diagonalisierbar. Unter physikalisch relevanten Operatoren sollen im folgenden solche verstanden werden, deren Eigenwerte in der gruppentheoretisch klassifizierten Basis eine physikalische Interpretation zugeordnet werden kann. In dieselbe Klasse von Operatoren fallen natürlich auch diejenigen, die eine explizite Darstellung im Orts- und (bzw.) Spinraum besitzen. Der oben benutzte Terminus 'physikalisch relevant' soll am folgenden Beispiel verdeutlicht werden. Wenn wir von einem N-dimensionalen Modellraum ausgehen, so ist die allgemeinste lineare Transformationsgruppe die unitäre Gruppe $U(N)$ (oder auch $SU(N)$). Eine mögliche Gruppenkette zur Klassifikation von Vielteilchenzuständen in diesem Modellraum ist gegeben durch:

+) Natürlich gibt es in anderen Bereichen der Physik - insbesondere der Festkörperphysik - eine Reihe von Beispielen 'exakt' lösbarer Vielteilchensysteme (etwa Ferro-, Antiferromagnetismus, Spinwellen); auf die Diskussion derartiger Beispiele muß jedoch - aus naheliegenden Gründen - verzichtet werden; wir wollen uns beschränken auf solche Beispiele, die im Rahmen der Kernphysik anwendbar erscheinen.

$$U(N) \supset U(N-1) \supset \dots \supset U(2) \supset U(1)$$

Diese würde die Basiszustände ('Gelfand-states') mathematisch eindeutig charakterisieren (Ref. 19). Da diese Kette jedoch die orthogonale Gruppe $SO(3)$, deren Darstellung die möglichen Gesamtdrehimpulse der Zustände angibt, nicht enthält, besitzt sie physikalisch wenig Bedeutung. Eine physikalische Kette ist gegeben durch

$$U(N) \supset \dots \supset SO(3) \supset SO(2)$$

Obwohl man die eindeutige Klassifikation der Basiszustände teilweise aufgibt, ist die Verwendung dieser Gruppenkette durch die physikalische Situation (H_0 kugelsymmetrisch) natürlich ausgezeichnet.

3.2. Austauschwechselwirkung

Bekanntlich besitzen viele phänomenologische Ansätze einer rein zentralen effektiven Zweiteilchenwechselwirkung folgende Gestalt

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^c(i, k) &= f(r_{ik}) \cdot \{a_0 + a_\sigma \vec{S}_i \cdot \vec{S}_k + a_\tau \vec{T}_i \cdot \vec{T}_k + a_{\sigma\tau} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_k \vec{T}_i \cdot \vec{T}_k\} \\ &= a_0 f(r_{ik}) + f(r_{ik}) \cdot \bar{A}(i, k) \end{aligned} \quad (3.2.1.)$$

wobei $f(r)$ eine skalare Funktion des Relativabstands bezeichnet. Die Austauschmischung $A(i, k)$ läßt sich mit Hilfe von Austauschoperatoren $P_{ik}^{\tau, \sigma, \tau}$ für Orts-, Spin- und Isospinkoordinaten umformen zu ⁺⁾

$$\begin{aligned} \bar{A}(i, k) &= -4 a_{\sigma\tau} P_{ik}^\tau + 2(a_\sigma - a_{\sigma\tau}) P_{ik}^\sigma \\ &\quad + 2(a_\tau - a_{\sigma\tau}) P_{ik}^\tau + C \end{aligned} \quad (3.2.2.)$$

mit

$$C = a_{\sigma\tau} - a_\sigma - a_\tau$$

⁺⁾

Die Operatoren P^τ , P^σ und P^τ werden in der Literatur häufig als Majorana-, Bartlett- und Heisenberg-Austauschoperatoren bezeichnet.

Die explizite Darstellung dieser Austauschoperatoren ist:

$$P_{ik}^{\sigma} = \frac{1}{2} (1 + \underline{\sigma}_i \cdot \underline{\sigma}_k) ; \quad P_{ik}^{\tau} = \frac{1}{2} (1 + \underline{\tau}_i \cdot \underline{\tau}_k) \quad (3.2.3.)$$

$$P_{ik}^{\tau} = - P_{ik}^{\sigma} \cdot P_{ik}^{\sigma}$$

Die Vielteilchenoperatoren $R^{\tau, \sigma, \tau} = \sum_{i < k}^n P_{ik}^{\tau, \sigma, \tau}$ stellen ein erstes, nichttriviales Beispiel dafür dar, wie durch gruppentheoretische Klassifikation der Modellraumbasis eine Diagonalisation von Vielteilchenoperatoren erreicht werden kann.

Unser Modell für V_{eff} , d. h. H_{int} aus Gleichung (1.3.2.), lautet jetzt:

$$V_{\text{eff}} = \sum_{i < k}^n A(i, k) \quad (3.2.4.)$$

$$= -4a_{\sigma\tau} R^{\tau} + 2(a_{\sigma} - a_{\sigma\tau}) R^{\sigma} + 2(a_{\tau} - a_{\sigma\tau}) R^{\tau} + C$$

Im folgenden werden die Eigenfunktionen zu diesem V_{eff} und die zugehörigen Eigenwerte mit gruppentheoretischen Mitteln bestimmt.

Austauschoperatoren und die symmetrische Gruppe

Betrachten wir n -Nukleonenfunktionen, die Produktfunktion aus n Einteilcheneigenfunktionen zu H_0 bzw. Summen von solchen Produktfunktionen sind. Weiter soll sich die gesamte Vielteilchenfunktion als Produkt aus einer Orts-, Spin- und Isospinfunktion darstellen lassen (LS-limit). Dann können wir uns zunächst auf den Ortsanteil beschränken. Alle Überlegungen lassen sich sofort auf den Spin- und Isospinanteil übertragen.

Da die Austauschoperatoren P_{ik}^{τ} als Elemente der symmetrischen Gruppe S_n - d. h. der Gruppe aller Permutationen der Teilchennummern 1, ..., n - aufgefaßt werden können, werden wir erwarten, daß die Vielteilchenbasis nach Darstellung der S_n klassifiziert werden muß. Ohne auf Ableitungen und Beweise einzugehen, wollen wir folgendes wichtige Ergebnis über die Darstellungstheorie der S_n festhalten,

das unmittelbar aus der Theorie endlicher Gruppen (Ref. 20, 21, 22) folgt:

Satz 3.2.1.

Alle (endlich vielen) irreduziblen Darstellungen der S_n lassen sich durch Partitionen $[\lambda] = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ von n charakterisieren, mit:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \quad ; \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$$

(graphische Darstellung durch Young-Diagramme)

Zum Beispiel $[\lambda] = [n]$ bzw. $[\lambda] = [1^n]$, die eindimensionalen total symmetrischen bzw. total antisymmetrischen Darstellungen der S_n .

Falls man nun den Ortsanteil der n -Teilchenfunktion durch Darstellungen der S_n , d. h. definierte Permutationssymmetrie, kennzeichnet, so läßt sich folgender Satz anwenden (Ref. 20):

Satz 3.2.2.

Der Operator $R^r = \sum_{i < k} P_{ik}^r$ ist in einer Basis zur irreduziblen Darstellung $[\lambda] = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ der S_n diagonal und besitzt die Eigenwerte f^r :

$$\begin{aligned} f^r &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu}(\lambda_{\mu}+1) - \sum_{\mu=1}^n \mu \cdot \lambda_{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu}(\lambda_{\mu} - 2\mu + 1) \end{aligned} \quad (3.2.5.)$$

Der Eigenwert f^r läßt sich anschaulich deuten als die Differenz der Anzahl symmetrischer und antisymmetrischer Paare in einer Ortswellenfunktion der Symmetrie $[\lambda]$.

Ein zu (3.2.5.) analoger Ausdruck $f^r(f^{\tau})$ ergibt sich für die Eigenwerte von $R^{\sigma} = \sum_{i < k} P_{ik}^{\sigma}$ (bzw. $R^{\tau} = \sum_{i < k} P_{ik}^{\tau}$), wenn man die Spinfunktion (Isospinfunktion) ebenfalls nach Darstellungen

der symmetrischen Gruppe S_n klassifiziert.

Mit Hilfe von Gleichung (3.2.5.) haben wir also das Eigenwertproblem für die Operatoren R^τ , R^σ und R^τ gelöst:

$$R^x |[\lambda_1^x, \dots, \lambda_n^x]\rangle = \xi^x |[\lambda_1^x, \dots, \lambda_n^x]\rangle \quad (3.2.6.)$$

mit

$$x = \tau, \sigma, \tau$$

Damit hätten wir auch das Eigenwertproblem zu V_{eff} aus Gleichung (3.2.4.) bereits gelöst, wenn wir wüßten, welche Young-Diagramme für den Orts-, Spin- und Isospinanteil möglich sind. Dieser Punkt wird im nächsten Unterabschnitt behandelt.

Unitäre Gruppen und die Klassifikation von Vielteilchenzuständen

Charakterisiert man Orts-, Spin- und Isospinfunktion durch Darstellungen der S_n , so ist zu beachten, daß wegen der Antisymmetrie der Gesamtwellenfunktion nicht alle Symmetrien für den Orts-, Spin- und Isospinanteil realisierbar sind. Um herauszufinden, welche Symmetrien möglich sind, greift man auf die Darstellungstheorie unitärer Gruppen zurück. Dieses Problem führt uns auch gleich zu einem allgemein gruppentheoretischen Klassifikationsschema für Vielkernenzustände.

Nehmen wir an, der Einteilchenraum sei bei Berücksichtigung der Spin- und Isospinfreiheitsgrade M -dimensional (z. B. $M = 4(2l + 1)$ für eine l -Schale von H_0 oder $M = 4 \left[(2l_{\text{max}} + 1) + (2(l_{\text{max}} - 2) + 1) + \dots + (2l_{\text{min}} + 1) \right]$ für eine Oszillatorschale mit N -Quanten und $l_{\text{max}} = N$, $l_{\text{min}} = 0$ oder 1). Allgemein gilt $M = 4 \cdot N$, wobei N die Dimension des Einteilchenortsraumes angibt. Die allgemeinste normerhaltende Transformationsgruppe in diesem Raum ist durch die unitär unimodulare Gruppe $SU(M)$ gegeben.

Die n -Teilchenfunktionen, als Tensoren von Rang n über dem M -dimensionalen Einteilchenraum, bilden eine Basis für Darstellungen der $SU(M)$, deren Struktur eng mit den Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n (hier Gruppe aller simultanen Permutationen von Orts-, Spin und Isospinkoordinaten) verbunden ist. Es gilt nämlich, daß eine Basis aus

Tensoren vom Rang n für eine irreduzible Darstellung der $SU(M)$ auch eine Darstellung der S_n vermittelt (Ref. 20, 21). Diese im allgemeinen reduzierbare Darstellung der S_n zerfällt in s ($s \geq 1$) gleiche oder äquivalente irreduzible Darstellungen. Das bedeutet, daß auch die Darstellungen der $SU(M)$ durch Partitionen von n bzw. Young-Diagramme gekennzeichnet werden können. Wir verwenden das Symbol $\{\lambda\}$ wenn die Partition eine Darstellung unitärer Gruppen bezeichnet.

Aufgrund der physikalischen Forderung des Pauliprinzipes sind die n -Teilchenfunktionen ein total antisymmetrischer Tensor über dem Einteilchenraum, lassen also nur die Darstellung $\{1^n\}$ der $SU(M)$, der Dimension $\binom{M}{n}$ zu. (Beachte den Unterschied zur Darstellung $[1^n]$ der S_n !) Durch Reduktion auf weitere Untergruppen kann man eine verfeinerte Klassifikation der n -Teilchenbasis erzeugen. Im LS-Schema etwa lautet die zugehörige Gruppenkette (Wignersche Supermultiplettklassifikation):

$$\begin{aligned} SU(M) \supset SU(N) \times SU(4) \supset SU(N) \times (SU(2) \times SU(2)) \supset \\ \supset SO(3) \times (SU(2) \times SU(2)) \end{aligned} \quad (3.2.7.)$$

Der erste Reduktionsschritt ergibt die möglichen Orts- bzw. Spinsymmetrien der Gesamtwellenfunktion an.

Ergebnis

Es treten nur solche Young-Diagramme für Darstellungen $\{\lambda\}$ der $SU(N)$ auf, die höchstens N -Zeilen und 4 Spalten besitzen. Die Darstellungen $\{\mu\}$ der $SU(4)$ müssen zu $\{\lambda\}$ konjugiert sein (Symbol $\{\mu\} = \{\tilde{\lambda}\}$).

Die Symmetrie der Spinfunktion (Isospinfunktion) ergibt sich aus dem Reduktionsschritt $SU(4) \supset SU(2) \times SU(2)$. Äquivalent zur Symmetrie $\{\lambda_1, \lambda_2\}^{\sigma, \tau}$ kann man auch S bzw. T angeben:

$$S = \frac{1}{2} (\lambda_1^\sigma - \lambda_2^\sigma) \quad ; \quad T = \frac{1}{2} (\lambda_1^\tau - \lambda_2^\tau)$$

Der letzte Reduktionsschritt in Gleichung (3.2.7.) auf die ortho-

gonale Gruppe gibt die möglichen Bahndrehimpulse innerhalb einer Ortssymmetrieklasse an. Während der letzte Reduktionsschritt in Gleichung (3.2.7.) etwas kompliziertere gruppentheoretische Methoden erfordert, lassen sich die ersten beiden Schritte mit den oben angegebenen Regeln einfach durchführen. Wir wollen das am Beispiel der Konfiguration $(sd)^4$ des harmonischen Oszillators demonstrieren, deren vollständige Klassifikation in Tabelle 3.2.1. angegeben ist. Aus offenkundigen Gründen ist nur die höchste Ortssymmetrieklasse $\{\lambda^v\} = \{4\}$ gezeigt. In diesem Beispiel ist natürlich $M = 24$ und $N = 6$ in Gleichung (3.2.7.) einzusetzen.

Darstellung der

$SU(6)$ (Ort)

$\{\lambda^v\}$



$\{4\}$

$SU(4)$ (Spin-Isospin)

$\{\mu\} = \{\widetilde{\lambda^v}\}$



$\{1111\}$

$SU(2)$ (Spin) $\times$ $SU(2)$ (Isospin)

$\{\lambda^e\}$

$\{\lambda^v\}$



$\{22\}$

$S = 0$



$\{22\}$

$T = 0$

Eigenwerte der Austauschwechselwirkung

Wollen wir das Ergebnis dieses Abschnittes nochmals kurz zusammenfassen. Die physikalische Relevanz von Austauschoperatoren ist aus phänomenologischen Ansätzen für die effektive Wechselwirkung, analog zu (3.2.1.), evident. Vernachlässigt man in (3.2.1.) die Radialabhängigkeit von $A(i, k)$, so wird man auf eine gruppentheoretisch lösbare Wechselwirkung (3.2.4.) geführt. Durch das Studium der Gruppenkette (3.2.7.) erhält man in der oben demonstrierten Weise die möglichen Symmetrien des Orts-, Spin- und Isospinanteils der $\binom{M}{n}$ n -Teilchenfunktionen, charakterisiert durch Young-Diagramme $\{\lambda^v\}$, $\{\lambda^s\}$ und $\{\lambda^t\}$.

Die Eigenwerte der Austauschmischung von Gleichung (3.2.4.) in dieser Basis sind dann durch ξ^v , ξ^s und ξ^t aus (3.2.5.) gegeben:

$$V_{\text{eff}} | \{\lambda^v\}, \{\lambda^s\}, \{\lambda^t\} \rangle = E(\lambda^v, \lambda^s, \lambda^t) | \{\lambda^v\}, \{\lambda^s\}, \{\lambda^t\} \rangle$$

mit:

$$E(\lambda^v, \lambda^s, \lambda^t) = -4a_{\sigma\tau}\xi^v + 2(a_\sigma - a_{\sigma\tau})\xi^s + 2(a_\tau - a_{\sigma\tau})\xi^t + \frac{1}{2}n(n-1)(a_{\sigma\tau} - a_\sigma - a_\tau) \quad (3.2.8.)$$

Der Operator $H_{\text{int}} = V_{\text{eff}}$ aus Gleichung (3.2.4.) spaltet also die in H_0 entarteten Zustände gemäß Gleichung (3.2.8.) auf. Die Eigenwerte von H_{int} bedeuten natürlich zunächst wieder diese energetische Aufspaltung. Da aber andererseits $\xi^{v,s,t}$ die Differenz symmetrischer und antisymmetrischer Nukleonenpaare im entsprechenden Wellenfunktionsanteil bedeuten, charakterisiert H_{int} auch die Permutationssymmetrie der Zustände. H_{int} führt zwangsweise dazu, daß die n -Teilchenzustände eine definierte Permutationssymmetrie besitzen müssen, die Quantenzahlen $\{\lambda^{v,s,t}\}$ für diese Zustände definiert. Selbstverständlich hängen hier die Betrachtungen von den Parametern in Gleichung (3.2.8.) ab.

Etwa für $a_{\sigma\tau} > 0$ führt H_{int} dazu, daß die Zustände der höchsten

Ortssymmetrieklasse (f^T maximal) energetisch am tiefsten abgesenkt werden. Jedoch treten im allgemeinen innerhalb einer Ortssymmetrieklasse viele Zustände mit verschiedenen Bahndrehimpulsen auf, die durch H_{int} energetisch nicht diskriminiert werden, und entartet bleiben (vergleiche z. B. Tabelle 3.2.1.). Es verbleibt also eine restliche Entartung, die mit wachsendem n schnell zunimmt.

Es sei noch bemerkt, daß diese Klassifikation nach Permutationssymmetrien auch allgemeinere Bedeutung besitzt. Wenn nämlich der Vielteilchenhamiltonoperator invariant ist unter getrennter Permutation von Orts- und Spinisospinkoordinaten, dann ist diese Klassifikation der Vielteilchenbasis nach Ortssymmetrien exakt in dem Sinne, daß verschiedene Ortssymmetrieklassen nicht gemischt werden.

Schließlich sei noch erwähnt, daß es in bestimmten Fällen (gg-Kerne mit $S=T=0$ in Zuständen höchster Ortssymmetrie) günstiger ist, folgende äquivalente Form von V_{eff} aus (3.2.4.) zu verwenden:

$$V_{eff} = a_S (2S^2 - \frac{3}{2}n) + a_T (2T^2 - \frac{3}{2}n) + a_{ST} \left[\sum_{i < k}^n (-4P_{ik}^x - 2P_{ik}^y - 2P_{ik}^z + 1) \right] \quad (3.2.9.)$$

mit Eigenwerten

$$E(\lambda^S, \lambda^T, \lambda^T) = a_S (2S \cdot (S+1) - \frac{3}{2}n) + a_T (2T(T+1) - \frac{3}{2}n) + a_{ST} (-4f^x - 2f^y - 2f^z + \frac{1}{2}n(n-1)) \quad (3.2.10.)$$

Abschließend wollen wir noch kurz den Einfluß der Austauschwechselwirkung aus Gleichung (3.2.9.) auf die Konfiguration $(sd)^4$ im harmo-

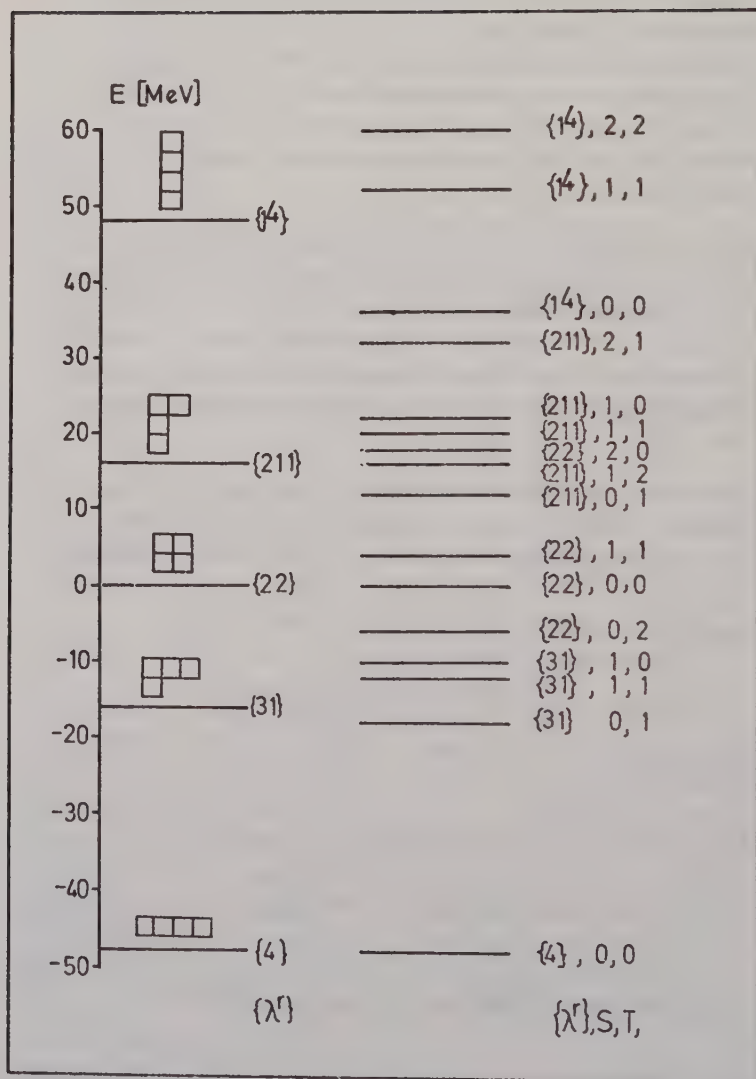


Fig. 3.2.1.: 'Spektrum' der Konfiguration $(sd)^4$ unter der Austauschwechselwirkung von Gleichung (3.2.4.)

nischen Oszillator diskutieren. Die dazu notwendige Klassifikation der Zustände mit Hilfe der Kette (3.2.7.) ist in Tabelle (3.2.1.) angegeben. Als weitere Untergruppe, die nicht in (3.2.7.) enthalten ist, wurde in Tabelle 3.2.1. die $SU(5)$ verwendet, die die Symmetrie der d-Teilchen in der jeweiligen Konfiguration $S^n d^m$ ($m+n=4$) angibt.

Figur 3.2.1. zeigt schematisch, wie die Zustände der Konfiguration $(sd)^4$ durch die Austauschwechselwirkung aus Gleichung (3.2.4.) bzw. (3.2.9.) energetisch aufgespalten werden (vergleiche Gleichung (3.2.8.) bzw. (3.2.10.)). Dabei wurden die realistischen Werte $\alpha_{\sigma\tau} = 2$ MeV, $\alpha_S = 3.5$ MeV und $\alpha_T = 1.5$ MeV verwendet (vergleiche auch Kapitel 4). Als Energienullpunkt wurde die Energie der ungestörten Konfiguration $(sd)^4$ gewählt.

Berücksichtigt man nur den Anteil von V_{eff} , der dem Austausch von Ortskoordinaten der Teilchen entspricht (erster Term in Gleichung (3.2.5.)), so erhält man das linke 'Spektrum' von Figur 3.2.1.. Wie bereits erwähnt wurde, müssen wegen $\alpha_{\sigma\tau} > 0$ Zustände höchster Ortsymmetrie am tiefsten liegen. Wir wissen bereits, daß dies Zustände mit der größten Anzahl von symmetrischen Teilchenpaaren in der Ortswellenfunktion sind.

Schaltet man die restlichen Anteile von V_{eff} ein, die auf die Permutationssymmetrie der Spin- und Isospinwellenfunktion ansprechen, so erhält man das rechte 'Spektrum' in Figur 3.2.1..

Wie wir sehen, werden für einen festen Wert von T Zustände mit höchster Ortssymmetrie und S minimal energetisch bevorzugt. Werfen wir jedoch einen Blick auf Tabelle 3.2.1. so erkennen wir, daß die Zustände von Figur 3.2.1. noch stark entartet sind, da zu festen Werten von $\{\lambda\}$, S und T im allgemeinen noch viele Zustände zu verschiedenen Werten des Gesamtbahndrehimpulses L gehören.

Diese noch verbleibende Entartung wächst mit n schnell an. Das nächste Ziel muß daher sein, Terme in eine gruppentheoretische Vielteilchenwechselwirkung aufzunehmen, die diese Zustände energetisch weiter diskriminieren.

Tabelle 3.2.1. Klassifikation der Konfiguration $(sd)^L$ nach der Gruppenkette (3.2.7.)

Konfiguration d^4

SU(6)	SU(5)	L	SU(2) x SU(2)	S	T	F _{ort}	F _S	F _T
{4}	{4}	$0, 2^2, 4^2, 5$ 6, 8	{22} x {22}	0	0	6	0	0
{31}	{31}	$1^2, 2^2, 3^3, 4^2$ $5^2, 6, 7$	{22} x {31}	0	1	2	0	2
			{31} x {22}	1	0		2	0
			{31} x {31}	1	1		2	2
{22}	{22}	$0^2, 2^2, 3, 4^2$ 6	{22} x {22}	0	0	0	0	0
			{31} x {31}	1	1		2	2
			{22} x {4}	0	2		0	6
			{4} x {22}	2	0		6	0
{211}	{211}	$1^2, 2, 3^2, 4$ 5	{22} x {31}	0	1	-2	0	2
			{31} x {22}	1	0		2	0
			{31} x {31}	1	1		2	2
			{31} x {4}	1	2		2	6
			{4} x {31}	2	1		6	2
{1 ⁴ }	{1 ⁴ }	2	{22} x {22}	0	0	-6	0	0
			{31} x {31}	1	1		2	2
			{4} x {4}	2	2		6	6

Konfiguration d^3_s

{4}	{3}	0, 2, 3, 4, 6	Wie für die entsprechende SU(6) Darstellung in d^4 .
{31}	{3}	0, 2, 3, 4, 6	
	{21}	1, 2 ² , 3, 4, 5	

Tabelle 3.2.1.

(Fortsetzung)

SU(6)	SU(5)	L	SU(2) x SU(2)	S	T	ξ^{ort}	ξ^{σ}	ξ^{τ}
$\{22\}$	$\{21\}$	1, 2 ² , 3, 4, 5	Wie für die entsprechende SU(6) Darstellung in d^4 .					
$\{211\}$	$\{21\}$	1, 2 ² , 3, 4, 5						
	$\{1^3\}$	1, 3						
$\{1,4\}$	$\{1^3\}$	1, 3						

Konfiguration d^2s^2

$\{4\}$	$\{2\}$	0, 2, 4	
$\{31\}$	$\{2\}$	0, 2, 4	
	$\{11\}$	1, 3	
$\{22\}$	$\{2\}$	0, 2, 4	
$\{211\}$	$\{11\}$	1, 3	

Konfiguration ds^3

$\{4\}$	$\{1\}$	2	
$\{31\}$	$\{1\}$	2	

Konfiguration s^4

$\{4\}$	$\{0\}$	0	
---------	---------	---	--

Für die Konfigurationen d^3s , d^2s^2 , ds^3 , s^4 sind die Spin-Isospinquantenzahlen, ξ^{ort} , ξ^{σ} und ξ^{τ} dieselben wie für die entsprechende SU(6)-Darstellung in $(d)^4$.

3.3. 'Pseudomagnetische' Wechselwirkungen

3.3.1. Vorbemerkung

Im folgenden wollen wir zwei schematische Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen näher untersuchen, deren Struktur durch den Austausch pseudoskalarer Mesonen nahegelegt wird.

Dazu betrachten wir zunächst den Austausch eines (virtuellen) Pions zwischen zwei gebundenen Nukleonen:

Das Pion ist ein pseudoskalaras Teilchen (mit den inneren Quantenzahlen $J^\pi = 0^-$), das vornehmlich in einer relativen p-Welle mit dem Nukleon wechselwirkt; demnach sollte ein Nukleon, das ein solches p-Wellenpion emittiert (bzw. absorbiert) einen 1^+ Übergang durchführen.

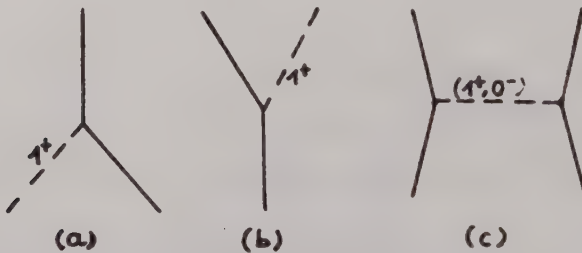


Fig. 3.3.1.: Schematische Darstellung der Absorption bzw. Emission eines Pions durch ein Nukleon (Fig. a) und b)) bzw. des Austausches eines (1^+) Pions.

Dementsprechend führt der Austausch eines solchen Pions zwischen zwei Nukleonen zu einer 'pseudomagnetischen' Wechselwirkung (Fig. 3.3.1.c). Diese enthält neben einer Reihe von anderen Termen (Ref. 23) (z. B. Tensorwechselwirkung), die im weiteren nicht berücksichtigt werden, auch einen Dipol-Dipol-Anteil. Ignorieren wir die Radialabhängigkeit des Dipol-Dipol-Anteils der Wechselwirkung, dann erhalten wir eine (effektive) Zweiteilchenwechselwirkung der Art:

$$V^{(0)}(i, k) = V_0 \underline{\mu}^{(0)}(i) \cdot \underline{\mu}^{(0)}(k) \quad (3.3.1.)$$

wobei $\underline{\mu}^{(0)}$ ein Pseudovektoroperator ist, der im Rahmen der Nukleonen wirkt, und dessen allgemeine Form gegeben ist durch:

$$\underline{\mu}^{(0)} = \cos \gamma_0 \underline{\ell} + \sin \gamma_0 \underline{\Sigma} \quad (3.3.2.)$$

Dementsprechend lautet dann die Wechselwirkung von Gleichung (3.3.1.):

$$V^{(0)}(i, k) = V_0 (\cos \gamma_0 \underline{\ell}_i + \sin \gamma_0 \underline{\Sigma}_i) \cdot (\cos \gamma_0 \underline{\ell}_k + \sin \gamma_0 \underline{\Sigma}_k) \quad (3.3.3.)$$

mit den beiden freien Parametern V_0 und γ_0 .

Bei diesen Überlegungen haben wir den Isospin des ausgetauschten Mesons noch nicht berücksichtigt, und Gleichung (3.3.3.) würde für den Austausch isoskalarer, pseudoskalarer Mesonen zutreffen (z. B. η -Meson).

Aus der Tatsache, daß das Pion ein isovektorielles Meson ist, folgt unmittelbar

$$V^{(1)}(i, k) = V_1 (\cos \gamma_1 \underline{\ell}_i + \sin \gamma_1 \underline{\Sigma}_i) \cdot (\cos \gamma_1 \underline{\ell}_k + \sin \gamma_1 \underline{\Sigma}_k) \cdot (\underline{\tau}_i \cdot \underline{\tau}_k) \quad (3.3.4.)$$

Im folgenden wollen wir auf eine tiefergehende, mesonentheoretische Motivierung der beiden Ansätze (3.3.3.) und (3.3.4.) nicht näher eingehen, sondern die durch diese Wechselwirkung bedingten Symmetrien des nuklearen Vielteilchensystems diskutieren.

3.3.2. Isoskalare Wechselwirkung

In diesem Abschnitt werden wir H_{int} aus Gleichung (1.3.2.) bzw. die effektive Wechselwirkung zwischen den Nukleonen (siehe auch Vorbemerk-

kung zu diesem Kapitel) mit der in Gleichung (3.3.3.) definierten pseudomagnetischen Wechselwirkung $V^{(e)}$ identifizieren und deren Konsequenzen für das nukleare Vielteilchensystem diskutieren.

Es sei also

$$H_{\text{int}} = \sum_{i < k} V^{(e)}(i, k) = V_0 \sum_{i < k} \underline{\mu}^{(e)}(i) \cdot \underline{\mu}^{(e)}(k) \quad (3.3.5.)$$

Wir definieren ein 'pseudomagnetisches Moment' $\underline{M}$ durch:

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^n \underline{\mu}^{(e)}(i) = \cos \gamma_0 \cdot \underline{L} + \sin \gamma_0 \cdot \underline{S} \quad (3.3.6.)$$

Dann gilt: (3.3.7.)

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} V_0 \cdot \underline{M}^2 = \frac{1}{2} V_0 \sum_i (\underline{\mu}^{(e)}(i))^2$$

mit

$$(\underline{\mu}^{(e)}(i))^2 = \frac{1}{2} V_0 \cos^2 \gamma_0 L_i^2 + V_0 \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 L_i S_i + \frac{1}{2} V_0 \sin^2 \gamma_0 S_i^2 \quad (3.3.8.)$$

Der zweite Term von Gleichung (3.3.7.) enthält also nur bekannte Einzelteilchenoperatoren (wie z. B. eine Spinbahnwechselwirkung). Im folgenden wollen wir nur den Vielteilchenanteil von H_{int} diskutieren und setzen daher:

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= \frac{1}{2} V_0 \cdot M^2 = \\ &= \frac{1}{2} V_0 \left\{ \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 L^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\cos^2 \gamma_0 - \cos \gamma_0 \sin \gamma_0) L^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sin^2 \gamma_0 - \cos \gamma_0 \sin \gamma_0) S^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.3.9.)$$

Die zweite Identität folgt aus (3.3.6.) mit $\underline{1} = \underline{L} + \underline{S}$. Folglich ist das 'pseudomagnetische Moment' M^2 bzw. L^2 , S^2 und I^2 , eine Konstante der Bewegung für das durch H_{int} aus (3.3.9.) beschriebene Vielteilchensystem.

Die Aufgabe, die Eigenfunktionen zum Vielteilchenanteil H_{int} der pseudomagnetischen Wechselwirkung aus (3.3.9.) zu finden, läßt sich

natürlich sehr schnell lösen. Dann verwenden wir die in Abschnitt 3.2. diskutierte Gruppenkette (3.2.7.) zur Klassifikation der n -Teilchenzustände, so sind L^2 - und S^2 nichts anderes als die Casimiroperatoren der $SO(3)$ bzw. $SU(2)$ Untergruppen. Die Eigenwerte von L^2 (S^2) in einer Basis zu irreduziblen Darstellungen der $SO(3)$ ($SU(2)$) sind bekanntlich $L \cdot (L + 1)$ ($S \cdot (S + 1)$). (Denn die $SU(2)$ und $SO(3)$ besitzen dieselbe Lie-Algebra). Die Kopplung von L und S zu I entspricht der Reduktion $SO(3) \times SU(2) \approx SO(3) \times SO(3) \supset SO_1(3)$. Wenn wir die Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2. verwenden und die Zustände der Gruppenkette (3.2.7.) mit $|\lambda^{\gamma, \sigma, \tau}\rangle, L, S, I, T\rangle$ bezeichnen, so folgt die Eigenwertgleichung für H_{int} :

$$H_{\text{int}} |\lambda^{\gamma, \sigma, \tau}\rangle, L, S, I, T\rangle = E(L, S, I) |\lambda^{\gamma, \sigma, \tau}\rangle, L, S, I, T\rangle \quad (3.3.10.)$$

mit

$$\begin{aligned} E(L, S, I) = & \frac{1}{2} V_0 \{ \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 I \cdot (I + 1) \\ & + (\cos^2 \gamma_0 - \cos \gamma_0 \sin \gamma_0) L(L + 1) \\ & + (\sin^2 \gamma_0 - \cos \gamma_0 \sin \gamma_0) S(S + 1) \} \end{aligned} \quad (3.3.11.)$$

Wie man sieht, liefert der Ansatz (3.3.9.) sofort ein 'rotationsartiges' Spektrum, dessen Ursprung jedoch in der potentiellen Energie, H_{int} , liegt.

Es ist jedoch klar, daß die Casimiroperatoren orthogonaler Gruppen sicherlich nicht genügen, um das nukleare Vielteilchenproblem zu beschreiben, aus dem einfachen Grunde, daß sehr viele Zustände mit den gleichen Quantenzahlen L , S und I in einer Vielteilchenkonfiguration auftreten (vergleiche z. B. den relativ harmlosen Fall von $(sd)^4$ aus Tabelle 3.2.1.).

Durch Kombination aus (3.3.9.) mit einer Austauschwechselwirkung der Gestalt (3.2.2.) erhält man einen Vielteilchenoperator, der in der durch die Gruppenkette (3.2.7.) definierten Basis natürlich ebenfalls diagonal ist. Gleichung (3.2.9.) und (3.3.9.) legen folgende Ansätze nahe:

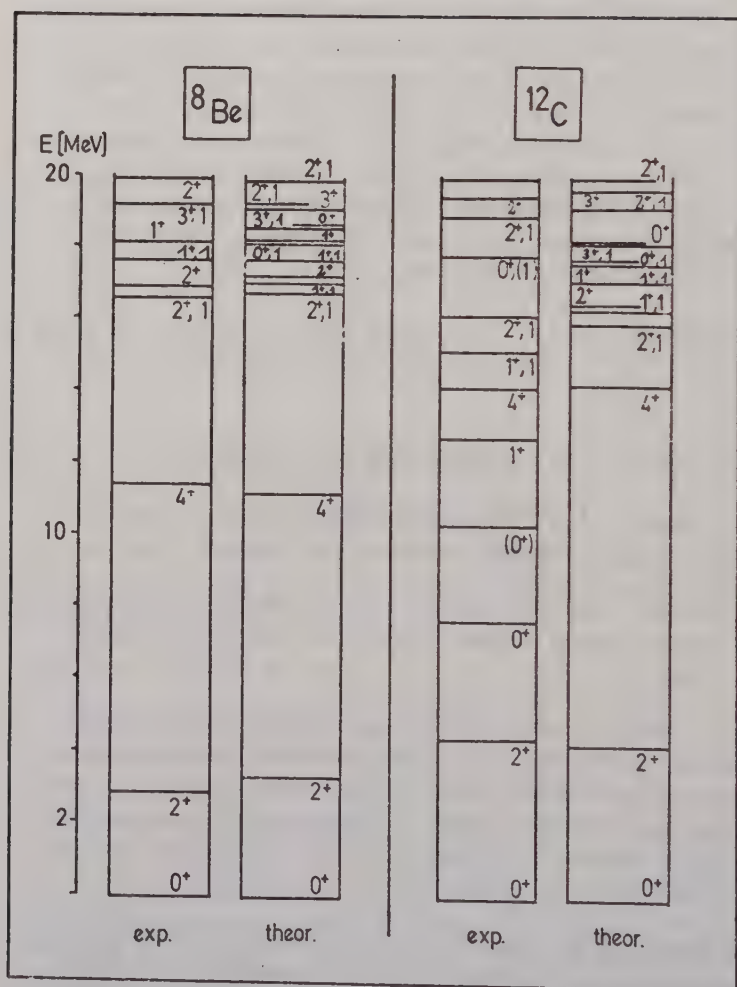


Fig. 3.3.2.: Spektrum von ^8Be und ^{12}C mit der Wechselwirkung von Gleichung (3.3.12.a).

$$H_{\text{int}} = a_{\sigma\tau} \sum_{i < k} (-4 P_{ik}^{\tau} - 2 P_{ik}^{\sigma} - 2 P_{ik}^{\tau} + 1) \\ + A \cdot I^2 + B L^2 + C S^2 + D T^2 \quad (3.3.12.)$$

Verwendet man diesen Operator als effektive Wechselwirkung in der 1p-Schale, so kann man z. B. die Rotationsbandenstruktur von ^8Be und ^{12}C weitgehend erklären (Ref. 24). Nur Zustände höchster Ortssymmetrie treten aufgrund der Austauschoperatoren als niedrigste angeregte Zustände auf.

$$\text{z. B.} \quad \text{für } (p)^4 \quad \text{und} \quad \{\chi^{\tau}\} = \{4\}, \quad L = 0, 2, 4 \\ \text{für } (p)^8 \quad \text{und} \quad \{\chi^{\tau}\} = \{44\}, \quad L = 0, 2, 4$$

Diese Tatsache ist in Figur 3.3.2. dargestellt. Die theoretischen Spektren wurden mit einer vereinfachten Form der Wechselwirkung aus Gleichung (3.3.12.) berechnet, um die Anzahl der freien Parameter zu reduzieren. Sie besitzt jedoch die aus (3.3.9.) und (3.2.9.) folgende Struktur:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} a b I^2 + \frac{1}{2} a (a-b) L^2 + \frac{1}{2} b (b-a) S^2 \\ + \alpha \cdot \sum_{i < k} P_{ik}^{\tau} + \frac{1}{2} V_1 T^2 \quad (3.3.12.a)$$

Wie man aus dem Vergleich mit dem experimentellen Spektrum sieht, können gewisse realistische Züge, insbesondere von ^8Be , reproduziert werden.

Wir möchten jedoch auf die Anwendung des Operators (3.3.12.) nicht weiter eingehen, da seine Brauchbarkeit auf die p-Schale beschränkt ist. Denn in der sd-Schale gibt es in einer einfachen Zweiteilchenkonfiguration zu $\{\chi\} = \{2\}$ bereits zwei 0^+ - und zwei 2^+ -Zustände, die energetisch entartet bleiben.

Dieser Effekt ist auch vom Standpunkt der Gruppentheorie her verständ-

lich. Denn für die p-Schale lautet die Gruppenkette (3.2.7.)

$$SU(12) \supset SU(3) \times SU(4) \supset SO(3) \times [SU(2) \times SU(2)]$$

und für die sd-Schale erhält man:

$$SU(24) \supset SU(6) \times SU(4) \supset SO(3) \times [SU(2) \times SU(2)]$$

Das heißt, für die sd-Schale benutzt man eine wesentlich größere Gruppe zur Klassifikation des Ortsanteils von Vielteilchenzuständen als in der p-Schale. Da die Anzahl infinitesimaler Operatoren der $SU(N)$ gleich N^2-1 ist, hat man folglich eine größere Anzahl von Gruppenoperatoren und eine reichere Untergruppenstruktur der Ortsymmetriegruppe. Es ist gerade diese Untergruppenstruktur, die Elliott ausnutzte, um eine weitere Gruppe, die $SU(3)$, zur Klassifikation des Ortsanteils einzuführen. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen.

3.3.3. Isovektorielle Wechselwirkung

Wir gehen jetzt von der Wechselwirkung (3.3.4.) aus:

$$H_{\text{int}} = \sum_{i < k} V_{(i,k)}^{(4)} = V_1 \cdot \sum_{i < k} \underline{\mu}^{(4)}(i) \cdot \underline{\mu}^{(4)}(k) \cdot \underline{\tau}_i \cdot \underline{\tau}_k \quad (3.3.13.)$$

mit $\underline{\mu}^{(4)} = \cos \gamma_i \cdot \underline{e} + \sin \gamma_i \cdot \underline{e}$

Definieren wir analog zu (3.3.6.)

$$\underline{\tilde{M}} = \sum_{i=1}^n \underline{\mu}^{(4)}(i) \cdot \underline{\tau}_i \quad (3.3.14.)$$

dann erhält man

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} V_1 \tilde{M}^2 - \frac{3}{2} V_1 \sum_i (\underline{\mu}^{(4)}(i))^2 \quad (3.3.15.)$$

(Hinweis: $\underline{\tau}_i \cdot \underline{\tau}_i = 3 \cdot \mathbf{1}$ wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix im Isospinraum bezeichnet.)

Der Einteilchenanteil in (3.3.15.) ist also von derselben Struktur wie in (3.3.8.). Im weiteren diskutieren wir wieder nur den Vielteilchenanteil und setzen:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} V_1 \tilde{M}^2 \quad (3.3.16.)$$

Offensichtlich ist jetzt die Größe $\tilde{M}^2$ eine Konstante der Bewegung.
Führen wir die Operatoren

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \sum_i \underline{L}_i \cdot \underline{T}_i = \sum_i \tilde{L}_i \\ \tilde{S} &= \sum_i \underline{S}_i \cdot \underline{T}_i = \sum_i \tilde{S}_i \\ \tilde{I} &= \tilde{L} + \tilde{S} = \sum_i (\tilde{L}_i + \tilde{S}_i) \end{aligned} \quad (3.3.17.)$$

so können wir formal ähnlich zu Gleichung (3.3.9.) schreiben:

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} = \frac{1}{2} V_1 \{ & \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 \tilde{I}^2 + \\ & + (\cos^2 \gamma_1 - \cos \gamma_1 \sin \gamma_1) \tilde{L}^2 \\ & + (\sin^2 \gamma_1 - \cos \gamma_1 \sin \gamma_1) \tilde{S}^2 \} \end{aligned} \quad (3.3.18.)$$

Damit stellt sich jetzt gemäß Satz 1 das Problem, die Eigenfunktionen zu $\tilde{L}^2$, $\tilde{S}^2$ und $\tilde{I}^2$ in der Basis von H_0 zu finden. Dem Autor ist jedoch (noch) keine Gruppe bekannt, mit deren Hilfe diese 3 Operatoren diagonalisiert werden können. Allerdings läßt sich in Spezialfällen eine Lösung angeben.

Fall 1: $\gamma_1 = \pi/2$

Dann folgt aus (3.3.13.)

$$H_{\text{int}} = V_1 \sum_{i < k} \underline{S}_i \cdot \underline{S}_k \underline{T}_i \cdot \underline{T}_k \quad (3.3.19.)$$

(Dasselbe H_{int} (bis auf eine Konstante) ergibt sich auch aus (3.3.16.), da die dort enthaltenen 'Diagonalterme' σ_i^2 bzw. τ_i^2 proportional zum Einheitsoperator im Spin- bzw. Isospinraum sind.)

Führt man wie in Abschnitt 3.2. Austauschoperatoren für Orts-, Spin- und Isospinkoordinaten ein (vergleiche (3.2.3.)), so kann (3.3.19.) umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= (-\frac{1}{2}) V_1 \sum_{i < k} (2 P_{ik}^x + P_{ik}^y + P_{ik}^z - \frac{1}{2}) \\ &= (-\frac{1}{2}) V_1 (2 R^x + R^y + R^z - \frac{1}{2} \sum_{i < k} 1) \end{aligned} \quad (3.3.20.)$$

wobei die Operatoren R aus Kapitel 3.2. bekannt sind.

Gleichung (3.3.20.) ist in ihrer Struktur äquivalent zur Austauschmischung (3.2.4.). Daher ist die Wechselwirkung aus (3.3.19.) ebenfalls durch Klassifikation von Vielteilchenzuständen nach Darstellung der symmetrischen Gruppe (analog zu Abschnitt 3.2.) diagonalisierbar.

Fall 2:

$$\text{Mit } \underline{\tau}_i \cdot \underline{\tau}_k = \sum_{q=0,\pm 1} (-1)^q \tau_i^q \tau_k^{-q}$$

und

$$\tau^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_x + i \tau_y) ; \quad \tau^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_x - i \tau_y) ; \quad \tau^0 = \tau_z$$

kann man $V^{(1)}(i, k)$ aus (3.3.13.) umschreiben zu

$$V^{(1)}(i, k) = V^0(i, k) - V^{\pm}(i, k) \quad (3.3.21.)$$

$$V^0(i, k) = V_1 \underline{\mu}^{(1)}(i) \underline{\mu}^{(1)}(k) \tau_i^0 \tau_k^0 \quad (3.3.22.)$$

$$V^{\pm}(i, k) = V_1 \underline{\mu}^{(1)}(i) \underline{\mu}^{(1)}(k) (\tau_i^{\pm} \tau_k^{\mp} + \tau_i^{\mp} \tau_k^{\pm}) \quad (3.3.23.)$$

Wir berücksichtigen nur $V^0(i, k)$ aus (3.3.22.); das entspricht physikalisch dem Austausch neutraler Mesonen. Wir setzen also in dieser Näherung nach (3.3.16.):

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i, k} V^{(0)}(i, k) \quad (\text{uneingeschränkte Summation !})$$

Mit den Definitionen:

$$\underline{L}_P = \sum_{i=1}^n \underline{L}_i \frac{1+\tau_i^0}{2} \quad ; \quad \underline{L}_n = \sum_{i=1}^n \underline{L}_i \frac{1-\tau_i^0}{2}$$

$$\underline{S}_P = \sum_{i=1}^n \underline{S}_i \frac{1+\tau_i^0}{2} \quad ; \quad \underline{S}_n = \sum_{i=1}^n \underline{S}_i \frac{1-\tau_i^0}{2}$$

kann man H_{int} umformen zu:

$$\begin{aligned} H_{int} = & \frac{1}{2} V_1 \left\{ \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 (1-C) I^2 \right. \\ & - (\cos^2 \gamma_1 + (1-C) \cos \gamma_1 \sin \gamma_1) L^2 \\ & - (\sin^2 \gamma_1 + (1-C) \cos \gamma_1 \sin \gamma_1) S^2 \\ & + 2 \cos^2 \gamma_1 (L_P^2 + L_n^2) \\ & \left. + 2 \sin^2 \gamma_1 (S_P^2 + S_n^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.23.)$$

$$C = 1 - \frac{(L_P^2 - L_n^2)(S_P^2 - S_n^2)}{L^2 \cdot S^2}$$

und $C = 0$, falls L und (oder S) gleich Null ist. Gleichung (3.3.23.) gilt im Kopplungsschema: $(L_P, L_n; L)$, $(S_P, S_n; S)$ und $(L, S; I)$.

oder:

$$\begin{aligned} H_{int} = & \frac{1}{2} V_1 \left\{ \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 (I_P^2 + I_n^2) \right. \\ & + (\cos^2 \gamma_1 - \cos \gamma_1 \sin \gamma_1) (L_P^2 + L_n^2) \\ & + (\sin^2 \gamma_1 - \cos \gamma_1 \sin \gamma_1) (S_P^2 + S_n^2) \\ & \left. - 1/4 C (I^2 - (I_P^2 + I_n^2)) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.24.)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{C} = & (\cos \chi_1 + \sin \chi_1)^2 + \\ & + (\cos^2 \chi_1 - \sin^2 \chi_1) \cdot \left(\frac{L_p^2 - S_p^2}{I_p^2} + \frac{L_n^2 - S_n^2}{I_n^2} \right) \\ & + (\cos \chi_1 - \sin \chi_1)^2 \cdot \left(\frac{L_p^2 - S_p^2}{I_p^2} \right) \left(\frac{L_n^2 - S_n^2}{I_n^2} \right) \end{aligned}$$

und $\bar{C} = 0$, falls I_p und (oder) I_n gleich Null ist. Gleichung (3.3.24.) gilt im Kopplungsschema: $(L_p, S_p; I_p)$, $(L_n, S_n; I_n)$, $(I_p, I_n; I)$.

Eine eingehende Diskussion der durch H_{int} aus (3.3.23.) und (3.3.24.) erzeugten Spektren und ein Vergleich mit dem Experiment übersteigt den Rahmen der vorliegenden Arbeit und wird gesondert beschrieben (Ref. 23). In Referenz 23 sind auch die zur Klassifikation von Zuständen $(sd)^n$ nach obigen Protonen- und Neutronendrehimpulsen notwendigen Gruppenketten sowie die gruppentheoretischen Reduktionen aufgeführt.

Es ist aus (3.3.23.) bzw. (3.3.24.) klar, daß H_{int} in den Zuständen $|(L_p L_n) L, (S_p S_n) S, I\rangle$ bzw. $|(L_p S_p) I_p, (L_n S_n) I_n, I\rangle$ diagonal ist. Die Konstanten der Bewegung sind offenkundig; welches Kopplungsschema realisiert ist, hängt von den Potential-Konstanten ab.

3.3.4. Zusammenfassung

Die beiden hier diskutierten 'pseudomagnetischen' Wechselwirkungen führen zu klar überschaubaren Kopplungsschemata; ihre mathematische Behandlung ist einfach. Sie reduzieren sich im Spezialfall auf die in Kapitel 3.2. diskutierten Austauschwechselwirkungen.

Allerdings zeigt sich, daß - in Anbetracht der z. B. in der (sd) -Schale vorliegenden Entartungen (siehe Kapitel 1.3.) - diese Wechselwirkung offensichtlich nicht ausreicht, die experimentellen Spektren zu beschreiben. Der Grund dafür ist naheliegend:

Alle Wechselwirkungen in Abschnitt 3.3.2. und 3.3.3. erforderten zu ihrer Diagonalisation nur orthogonale Gruppen. Der Reduktionsschritt von $SU(6)$ auf orthogonale Gruppen ist jedoch zu 'groß', so daß in einer

Gruppenkette $SU(6) \supset SO(3)$ starke Entartungen auftreten. Zur weiteren Klassifikation der Vielteilchenzustände müssen Zwischengruppen ausgenutzt werden, deren Darstellungen den Zuständen neue Quantenzahlen zuordnen. Ferner kann man die Operatoren der Lie-Algebra dieser Zwischengruppen dazu benutzen, diagonalisierbare Wechselwirkungsterme einzuführen, die über die bisher behandelten Austausch- und Drehimpulsoperatoren hinausgehen. Ein Beispiel zu diesem allgemeinen Konzept ist die $SU(3)$ -Gruppe, die wir im nächsten Abschnitt einführen.

3.4. Die Quadrupol-Quadrupol-Wechselwirkung

Bekanntlich läßt sich eine rein ortsabhängige und ansonsten beliebige Zweiteilchenwechselwirkung $V(\mathbf{r}_{ik})$ in Multipolkomponenten zerlegen.

$$V(\mathbf{r}_{ik}) = \sum_{\lambda} U_{\lambda}(r_{ik}) \cdot [Y_{\lambda}(\hat{\mathbf{r}}_i) \times Y_{\lambda}(\hat{\mathbf{r}}_k)]^0$$

Es ist klar, daß bei Schalenmodellrechnungen in harmonischer Oszillatorbasis und mit einem Modellraum, der aus einer Oszillatorschale besteht, nur endlich viele und geradzahlige Werte von λ eingehen. ⁺⁾

Speziell für die sd-Schale ist $\lambda = 0, 2, 4$ möglich und $\lambda = 2$ stellt sich als dominant heraus.

Berücksichtigt man nur die $\lambda = 2$ Komponente und setzt darüber hinaus die Radialabhängigkeit $U_2(r_{ik})$ proportional zu $r_i^2 \cdot r_k^2$ so erhält man die Quadrupol-Quadrupolkraft V_{QQ} , die wie wir sehen werden, mit Hilfe der $SU(3)$ -Gruppe diagonalisiert werden kann:

$$V_{QQ}(i, k) = \text{const.} \cdot [Q_2(i) \times Q_2(k)]^0 \quad (3.4.1.)$$

$$\text{mit } Q_{2\mu}(i) = r_i^2 Y_{2\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i)$$

Demnach lautet unser Modell für V_{eff} , d. h. H_{int} :

$$H_{\text{int}} = \text{const.} \sum_{i, k} [Q_2(i) \times Q_2(k)]^0 \quad (3.4.2.)$$

⁺⁾ Diese Tatsache folgt aus Drehimpuls- und Paritätserhaltung in den Winkelmatrixelementen von $V(\mathbf{r}_{ik})$.

Im folgenden wollen wir die gruppentheoretischen Methoden zur Behandlung von H_{int} bereitstellen. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß H_0 durch ein harmonisches Oszillatorpotential gegeben sei und beschränken den Modellraum auf eine Oszillatorschale mit N -Anregungsquanten. Die möglichen Einteilchenbahndrehimpulse sind dann gegeben durch

$$l = N, N-2, \dots, 1 \text{ oder } 0 \quad (3.4.3.)$$

und die Gesamtzahl M der Einteilchenzustände ist

$$M = \sum_{l=0 \text{ od. } 1}^N (2l+1) = \frac{1}{2} (N+1)(N+2) \quad (3.4.4.)$$

Die n -Nukleonen, die Zustände in diesem entarteten Modellraum besetzen können, sollen über eine QQ-Wechselwirkung miteinander wechselwirken. Die Voraussetzungen von Satz 1 aus Kapitel 1.3. sind also erfüllt mit $H_{\text{int}} = V_{\text{QQ}}$. Bevor wir jedoch zur Anwendung von Satz 1 auf dieses Problem kommen, müssen wir noch einige in Anhang A ausführlich diskutierte gruppentheoretische Zusammenhänge anmerken: Vielteilchenzustände in H_0 können durch Darstellungen der in (A 20) definierten Gruppe $U(3)$ bzw. $SU(3)$ klassifiziert werden.

Die QQ-Wechselwirkung aus (3.4.2.) ist identisch mit dem in (A 24) definierten Vielteilchenoperator $\mathcal{E}^2$, der sich aus den infinitesimalen Operatoren der $SU(3)$ zusammensetzt (vergleiche (A 22), (A 19) und (A 6)).

Wir setzen jetzt die in (3.4.2.) noch unbestimmte Konstante durch Gleichung (A 23) fest, so daß V_{QQ} im folgenden gegeben ist durch:

$$V_{\text{QQ}} = \frac{8\pi}{15} \sum_m (-1)^m \left[\sum_{i=1}^n r_i^2 Y_{2m}(i) \right] \left[\sum_{k=1}^n r_k^2 Y_{2,-m}(k) \right] \quad (3.4.5.)$$

Nach Satz 1 müssen wir nun, ausgehend von der harmonischen Oszillatorbasis, durch unitäre Transformation eine Vielteilchenbasis fin-

den, die Eigenbasis zu V_{QQ} ist. Die Lösung dazu liegt in Gleichung (A 25); denn V_{QQ} ist identisch mit F^2 und F^2 läßt sich durch Casimiroperatoren bekannter Gruppen ausdrücken. (X_0^2 ist innerhalb einer Oszillatorschale eine Konstante und wird im folgenden nicht berücksichtigt.) Diese Casimiroperatoren g^2 und L^2 sind in einer Basis zu irreduziblen Darstellungen der $U(3)$ und der $SO(3)$ diagonal und ihre Eigenwerte lassen sich gruppentheoretisch berechnen. Verwenden wir an der Stelle von $U(3)$ die Gruppe $SU(3)$ (irreduzible Darstellungen der $U(3)$ bleiben irreduzible bzgl. $SU(3)$), so sind, wie in Anhang A diskutiert, die Darstellungen der $SU(3)$ durch zwei ganze Zahlen $(\lambda\mu)$ charakterisiert und der Eigenwert g von G ist (Ref. 25):

$$g = \frac{2}{3} \{ \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu) \} \quad (3.4.6.)$$

Die in (A 20) als Untergruppe der $SU(M)$ definierte Gruppe $SU(3)$ läßt sich in die Klassifikationskette (3.2.7.) einbauen:

$$\begin{aligned} SU(4M) &\supset SU(M) \times [SU(2) \times SU(2)] \supset \\ &\supset SU(3) \times [SU(2) \times SU(2)] \supset SO(3) \times [SU(2) \times SU(2)] \end{aligned} \quad (3.4.7.)$$

Zusätzlich zur Ortssymmetrie $\{\chi\} SU(M)$, S, T ($SU(2) \times SU(2)$) und L ($SO(3)$) sind die Zustände dieser Basis charakterisiert durch die Symbole $(\lambda\mu)$ für $SU(3)$ -Darstellungen. Der Eigenwert $E_L^{\lambda\mu}$ von V_{QQ} ist nach (3.4.6.) und (A 25) gegeben durch:

$$V_{QQ} | \{\chi\}, (\lambda\mu), L, S, T \rangle = E_L^{\lambda\mu} | \{\chi\}, (\lambda\mu), L, S, T \rangle \quad (3.4.8.)$$

$$E_L^{\lambda\mu} = \frac{2}{3} \{ \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu) \} - \frac{1}{2} L(L+1)$$

Falls wir also ein System von n -Teilchen in einer Oszillatorschale betrachten, mit V_{QQ} als effektiver Wechselwirkung V_{eff} ($= H_{int}$), so sind die Eigenfunktionen zu V_{eff} durch die 'SU(3)-Basis' der Gruppenkette (3.4.7.) gegeben. H_{int} führt also in diesem Fall dazu, daß die $SU(3)$ -Quantenzahlen λ und μ zu Konstanten der Bewegung werden, zusätzlich zum Gesamtbahndrehimpuls L^2 des Systems und seinen Permu-

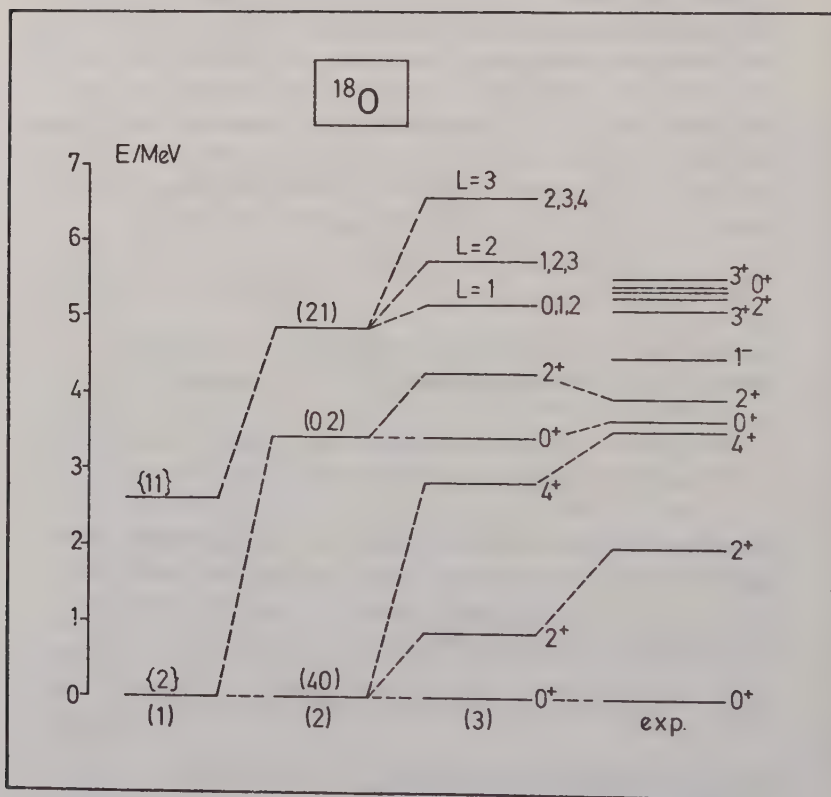


Fig. 3.4.1.: $(T=1)$ -Zustände der Konfiguration $(sd)^2$ (^{18}O) berechnet mit der Wechselwirkung von Gleichung (3.4.9.).

tationssymmetrien. Die Gruppenkette (3.4.7.) erlaubt im Vergleich zur Kette (3.2.7.) eine verfeinerte Klassifikation der Zustände innerhalb einer Oszillatorschale durch die zusätzlichen Quantenzahlen λ und μ .

Es sei noch erwähnt, daß diese $SU(3)$ -Klassifikation eine Auswahlregel für die Zustände unseres entarteten Modellraums einer Oszillatorschale zur Folge hat. Nach (A 21) ist nämlich der Quadrupoloperator für das n -Teilchensystem identisch (bis auf Faktoren) mit dem $SU(3)$ -Operator Q_m . Daraus folgt unmittelbar, daß keine $E2$ -Übergänge zwischen Zuständen zu verschiedenen $SU(3)$ -Darstellungen möglich sind (vergleiche dazu auch Anhang D und Anhang F).

Aus Abschnitt 3.2. folgt, daß wir zu V_{QQ} eine beliebige Austauschwechselwirkung addieren können, so daß beide in der Basis (3.4.7.) diagonal sind. Wir wollen diesen Modellansatz für V_{eff} noch etwas näher diskutieren.

Mit dem Ansatz

$$H_{int} = A \cdot V_{QQ} + B \sum_{i < k} \sigma_i \cdot \sigma_k \quad I_i \cdot I_k \quad (3.4.9.)$$

$$= A \cdot V_{QQ} - B (4 R^T + 2 R^S + 2 R^T - \sum_{i < k} 1)$$

ergeben sich die Eigenwerte von H_{int} nach (3.4.8.) und (3.2.6.) zu:

$$E = A \cdot \left\{ \frac{2}{3} (\lambda^2 + \mu^2 + 2\mu + 3(\lambda + \mu)) - \frac{1}{2} L(L+1) \right\} \quad (3.4.10.)$$

$$+ B \cdot (-4 f^T - 2 f^S - 2 f^T + \frac{1}{2} n(n-1))$$

Für die p -Schale von H_0 gilt, $SU(M) = SU(3)$ und deshalb fällt die Gruppenkette (3.4.7.) mit der durch (3.2.7.) gegebenen überein.

Neue Quantenzahlen, die zu einer weiteren, und wie wir sehen notwendigen Klassifikation führen, ergeben sich jedoch in der sd -Schale, wo $SU(M) = SU(6) \supset SU(3)$ gilt.

Diese Tatsache kann man an der einfachen und daher noch übersichtlich darstellbaren Konfiguration $(sd)^2$ verfolgen. Figur 3.4.1. zeigt, wie

die $(T = 1)$ -Zustände von $(sd)^2$ unter H_{int} aus (3.4.9.) energetisch aufgespaltet werden. Im Spektrum (1) werden zunächst die beiden Symmetrieklassen $\{2\}$ und $\{11\}$ durch den zweiten Term in Gleichung (3.4.9.) bzw. (3.4.10.) energetisch getrennt. Derjenige Anteil von V_{QQ} , der von den $SU(3)$ -Quantenzahlen λ und μ abhängt (vergleiche (3.4.8.)), führt zu einer weiteren Aufspaltung der verschiedenen in (1) noch entarteten $SU(3)$ -Darstellungen (40) und (02). Der L^2 -Anteil von V_{QQ} trennt die Zustände schließlich weiter auf, wie es in Spektrum (3) dargestellt ist. Wie in Abschnitt 3.3. erwähnt wurde, führen pseudomagnetische Operatoren in der Konfiguration $(sd)^2$ ($T = 1$) zu zweifach entarteten 0^+ und 2^+ -Zuständen. Etwas vereinfacht ausgedrückt sind das gerade die zwei 0^+ und 2^+ -Zustände der $SU(3)$ -Darstellung (40) bzw. (02) (vgl. Figur 3). Die $SU(3)$ -Klassifikation liefert gerade zusätzliche Quantenzahlen, λ und μ , und da V_{QQ} von λ und μ abhängt, werden diese Zustände jetzt energetisch diskriminiert.

Abschließend noch einige Bemerkungen:

Verwendet man eine Majorana-Austauschwechselwirkung, so kann man mit A-abhängigen Parametern $B(A)$ den Verlauf der Bindungsenergien von Kernen bis zu mittleren Massenzahlen A wiedergeben (Ref. 27). Eine Anwendung der QQ-Wechselwirkung (3.4.9.) auf sd-Schalenkerne zeigt, daß die Systematiken und Rotationsstrukturen der Anregungsspektren gut beschrieben werden, insbesondere am Anfang der sd-Schale (Ref. 28). Die Berechnung von Quadrupolmomenten und $B(E2)$ -Werten für ^{20}Ne , die im Rahmen des $SU(3)$ -Modells gruppentheoretisch möglich ist, zeigt gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Konfigurationsmischungsrechnungen, die mit üblichen effektiven Wechselwirkungen durchgeführt wurden (siehe Kapitel 4). Weitere Rechnungen mit Modellansatz (3.4.9.) für sd-Schalenkerne sind in Anhang D und Anhang F beschrieben. Diese Tatsachen weisen darauf hin, daß der in (3.4.9.) angegebene, gruppentheoretisch lösbare Vielteilchenoperator gewisse realistische Züge der effektiven Wechselwirkung zu enthalten scheint.

3.5. Separable Wechselwirkung

Im folgenden soll hier kurz eine in den letzten Jahren im Rahmen von Schalenmodellrechnungen erfolgreiche (phänomenologische) effektive Wechselwirkung erwähnt werden, die im Rahmen des 'Model of Separable Interaction' (MSI) entwickelte separable Wechselwirkung (Ref. 29,30).

Da wir dieser Wechselwirkung auch in Kapitel 4 (Anhang F) nochmals begegnen werden, sollen hier lediglich einige allgemeine gruppentheoretische Überlegungen skizziert werden, die im Zusammenhang mit den Ausführungen dieses Kapitels stehen und in Kapitel 4 nicht enthalten sind.

Der Modellansatz dieser Zweiteilchenwechselwirkung lautet ⁺⁾

$$V_{(i,k)}^{\text{sep}} = V_0 \int_0^1 q(r_{ik}) \cdot V_{IS \in X} \quad (3.5.1.)$$

wobei V_0 und q zwei Parameter sind, die in bestimmter Weise von der Massenzahl A des zu untersuchenden Kerns abhängen; $V_{IS \in X}$ beschreibt die Spin-Isospin-Austauschmischung.

$$V_{IS \in X} = 1 + a_{\sigma}(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k) + a_{\tau}(\vec{\tau}_i \vec{\tau}_k) + a_{\sigma\tau}(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k)(\vec{\tau}_i \vec{\tau}_k) \quad (3.5.2.)$$

(Zur Bedeutung und Wahl der Parameter siehe Ref. 29.)

Im folgenden wollen wir einen, im Zusammenhang mit der Fragestellung der vorliegenden Arbeit interessanten Aspekt dieser Wechselwirkung diskutieren:

Wie in Referenz 31 gezeigt wurde, ist die Wechselwirkung von Gleichung (3.5.1.) separabel in folgendem Sinn:

$$V_0 \int_0^1 q(r_{ik}) = 4\pi V_0 \sum_{\lambda} (-i)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} [O_{\lambda}(i) \times O_{\lambda}(k)]^0 \quad (3.5.3.)$$

⁺⁾

Hier und im folgenden bezeichnet $j_{\lambda}(x)$ eine sphärische Besselfunktion der Ordnung λ .

wobei abkürzend der allgemeine Einteilchenmultipoloperator $O_{\lambda\mu}(i)$ eingeführt wurde:

$$O_{\lambda\mu}(i) = j_{\lambda}(qr_i) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) \quad (3.5.4.)$$

Mit dieser speziellen Eigenschaft der effektiven Wechselwirkung läßt sich das allgemeine Vielteilchenproblem:

$$H = H_0 + H_{int}$$

mit

$$H_{int} = 1/2 \sum_{i \neq k}^n V^{sep}(i, k)$$

umschreiben zu:

$$H = H_0 + 2\pi V_0 \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} \cdot \{ A_{\lambda} + a_0 B_{\lambda} + a_2 C_{\lambda} + a_4 D_{\lambda} \} - \delta H_0 \quad (3.5.5.)$$

Hierbei haben wir abkürzend die folgenden Vielteilchenoperatoren eingeführt:

$$A_{\lambda} = [\alpha_{\lambda} \times \alpha_{\lambda}]^0$$

$$B_{\lambda} = [\beta_{\lambda} \times \beta_{\lambda}]^0 \quad (3.5.6.)$$

$$C_{\lambda} = [\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda}]^0$$

$$D_{\lambda} = [\delta_{\lambda} \times \delta_{\lambda}]^0$$

bzw.

$$\alpha_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^n O_{\lambda\mu}(i)$$

$$\beta_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^n O_{\lambda\mu}(i) \sigma_i$$

$$\begin{aligned}\delta_{\lambda\mu} &= \sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda\mu}(i) \tau_i \\ \delta_{\lambda\mu} &= \sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda\mu}(i) \sigma_i \tau_i\end{aligned}\quad (3.5.7.)$$

Hierbei sind die $\alpha_{\lambda\mu}$ die (verallgemeinerten) Vielteilchenmulti-
poloperatoren ($\lambda = 2$ entspricht etwa dem Vielteilchenquadrupol-
moment); die $\beta_{\lambda\mu}$, $\gamma_{\lambda\mu}$ und $\delta_{\lambda\mu}$ sind entsprechende Verallge-
meinerungen im Spin-Isospinraum.

Der Einteilchenanteil δH_0 in (3.5.5.) entsteht dadurch, daß in
(3.5.6.) die Summationen jeweils uneingeschränkt über i und k laufen.
Er hat die folgende Gestalt:

$$\delta H_0 = \sum_{i=1}^n \delta h_0(i)$$

mit

$$\delta h_0(i) = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\lambda} (2\lambda+1) j_{\lambda}^2(q\tau_i) \{1 + 3a_{\sigma} + 3a_{\tau} + 9a_{\sigma\tau}\} \quad (3.5.8.)$$

Dies bedeutet lediglich eine Modifikation des Einteilchenpotentials.
Wie in den vorangegangenen Beispielen wollen wir uns nur auf den Viel-
teilchenanteil konzentrieren und beschränken unsere Diskussion auf:

$$H_{int} = 2\pi V_0 \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} \{A_{\lambda} + a_{\sigma} B_{\lambda} + a_{\tau} (C_{\lambda} + a_{\sigma\tau} D_{\lambda})\} \quad (3.5.9.)$$

Mit Gleichung (3.5.9.) haben wir die separable Wechselwirkung in
eine Reihe von Vielteilchenoperatoren zerlegt, die wir mit den be-
sprochenen Methoden untersuchen können.

Zur Diskussion von H_{int} beschränken wir uns zunächst auf den Spezial-
fall:

$$a_{\sigma} = a_{\tau} = a_{\sigma\tau} = 0$$

Dann gilt - immer für eine in H_0 entartete Basis - nach Satz I aus
Kapitel I, daß die Gesamtwellenfunktion zu H auch Eigenfunktion zu:

$$H = \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} H_{\lambda}$$

sein muß. Wiederum sind die Werte von λ eingeschränkt (siehe Kapitel 3.4.). Für die sd-Schale gilt beispielsweise $\lambda=0,2,4$. Beschränken wir uns auf die wichtigste Multipolarität $\lambda=2$, dann erhalten wir speziell

$$H \rightarrow H_2 = [\alpha_2 \times \alpha_2]^0 \quad (3.5.10.)$$

Das hat in dieser Approximation für H_{int} zur Folge, daß die Gesamtwellenfunktion auch Eigenfunktion zu A_2 ist, bzw. das quadratische Quadrupolmoment, ein Skalar!, eine Konstante der Bewegung ist. Die wenigstens teilweise Aufhebung der Entartung von H_0 wird durch A_2 beschrieben, und die entstehenden Zustände sind durch ein mittleres quadratisches Quadrupolmoment charakterisiert.

Dieser Spezialfall entspricht der $SU(3)$ Klassifikation der Zustände von Kapitel 3.4. Verwendet man nämlich die asymptotische Form der Besselfunktion:

$$j_{\ell}(x) \rightarrow \frac{x^{\ell}}{(2\ell+1)!!} \quad (x \ll \ell)$$

dann erhält man gerade die $SU(3)$. Der Operator $\alpha_{2\mu}$ wird dann bis auf Faktoren identisch mit dem Operator $\mathcal{E}_{2\mu}$ aus (A 23) (siehe dazu auch Kapitel 4 und Anhang F).

Es übersteigt den Rahmen dieser Arbeit, auf die Eigenschaften und die gruppentheoretische Behandlung einer separablen Wechselwirkung näher einzugehen. Wir können aber bereits aus diesen Überlegungen die folgenden Schlüsse ziehen:

1. die gewöhnliche ad-hoc eingeführte $SU(3)$ Klassifikation der Kernspektren in der sd-Schale folgt als Spezialfall einer separablen Wechselwirkung in einer entarten harmonischen Oszillatorbasis;
2. damit wird auch deutlich, in welche Richtung man (vermut-

lich) weitergehen kann, um die in $SU(3)$ noch auftretenden Entartungen aufzuheben: offenbar muß man noch die anderen Operatoren A_λ ($\lambda \neq 2$) berücksichtigen;

3. damit ist aber auch die gruppentheoretische Fragestellung formuliert: man suche nach Gruppen, mit deren Hilfe sich A_2 und A_4 simultan diagonalisieren lassen.

Abschließend noch eine Bemerkung zur Spin-Isospinabhängigkeit der separablen Restwechselwirkung, d. h. zu den Operatoren B_λ , C_λ und D_λ :

Eine gleichzeitige gruppentheoretische Diagonalisation aller dieser Operatoren (einschließlich der offensichtlich wichtigen A_λ) erscheint, trotz einiger Ansätze (Ref. 32), nicht möglich.

An dieser Stelle aber kann man einige Näherungen diskutieren; z. B. kann man die Ortsabhängigkeit der β_λ , γ_λ und δ_λ (bzw. der B_λ , C_λ und D_λ) vernachlässigen (d. h. zum Grenzfall $q \rightarrow 0$ übergehen). Dann erhält man - neben den A_λ - die bereits in Kapitel 3.2. diskutierten Austauschwechselwirkungen, die zusammen mit V_{QQ} diagonalisierbar sind (siehe Kapitel 3.4.). Auf diese Überlegungen soll aber in anderem Zusammenhang näher eingegangen werden (siehe Kapitel 4).

3.6. Schlußbemerkungen

In diesem Kapitel haben wir eine Reihe mehr oder weniger realistischer Zweiteilchenwechselwirkungen untersucht, mit dem Ziel - im Rahmen einer entarteten Basis - exakte gruppentheoretische Lösungen des Vielteilchenproblems zu erhalten. Dabei haben wir gesehen, daß wir sehr wohl spezielle Züge von Kernspektren (z. B. Kopplungsschemata, 'Rotationsstrukturen', spezielle Orts- bzw. Spin-Isospin-Symmetrien) jeweils einfach beschreiben können. Andererseits ist offenbar noch diejenige Form der effektiven Wechselwirkung unbekannt, die eine einfache, allgemeine und weitgehend realistische Klassifikation der Kernspektren liefert. Darum wollen wir im nächsten Kapitel konkrete

und realistische Kernstrukturrechnungen analysieren mit dem Ziel, sowohl die implizit in diesen Rechnungen erzeugten - und für die Beschreibung offensichtlich wichtigen - Symmetrien herauszufinden, als auch zu sehen, inwieweit verschiedene effektive Wechselwirkungen zueinander äquivalent sind bzw. worin sie sich unterscheiden. Dabei werden wir uns auf die sd-Schale beschränken, denn nur dafür stehen zur Zeit entsprechende phänomenologische wie mikroskopische effektive Wechselwirkungen zur Verfügung.

Im einzelnen wollen wir die Zweiteilchenmatrixelemente verschiedener effektiver Wechselwirkungen in einer $SU(3)$ -Basis studieren. Ein Maß für die $SU(3)$ -Invarianz von V_{eff} ist dann durch das Verhältnis von Diagonal- und Nichtdiagonalmatrixelementen in dieser $SU(3)$ -Basis gegeben. Natürlich stellt etwa H_{int} aus (3.4.9.) eine rein zentrale Wechselwirkung dar, während V_{eff} vom mikroskopischen Standpunkt her auch nichtzentrale Anteile (z. B. Tensoranteile) enthalten kann. Daher ist es sinnvoll, die zentralen und nichtzentralen Anteile von V_{eff} aus einem gegebenen Satz von Matrixelementen herauszuprojizieren und die einzelnen Anteile getrennt zu untersuchen.

Weiter kann man versuchen, zu einem gegebenen Satz von Zweiteilchen-Matrixelementen eines gegebenen Modellraums eine äquivalente, analytische Darstellung der Zweiteilchenwechselwirkung zu konstruieren, die diese Matrixelemente reproduziert.

Diese Darstellung ermöglicht dann eine analytische Diskussion der Symmetrien von V_{eff} und damit des Vielteilchensystems.

Dieses Programm wird im nächsten Kapitel für die sd-Schale durchgeführt, wobei sowohl phänomenologische als auch mikroskopische Zweiteilchenmatrixelemente berücksichtigt werden. Wenn wir die damit erhaltenen Ergebnisse auf das Vielteilchensystem ($n > 2$) verallgemeinern, liegt natürlich die Annahme zugrunde, daß auch in diesem Fall V_{eff} im wesentlichen nur Zweiteilchenanteile enthält, d. h. effektive Vielteilchenkräfte vernachlässigt werden können.

4. DIE EFFEKTIVE NUKLEON-NUKLEON-WECHSELWIRKUNG IN DER sd-SCHALE

4.1. Vorbemerkung

In diesem Kapitel wollen wir die Überlegungen, die im Verlauf der vorhergehenden Kapitel erläutert wurden, anwenden auf die Analyse konkreter Schalenmodellrechnungen.

Wir wählen dabei die (sd)-Schalenkerne ($^{17}_0 - ^{40}_{Ca}$) aus, die wir einheitlich durch einen (inerten) $^{16}_0$ -Rumpf und eine (sd) n -Konfiguration beschreiben wollen.

Für einen speziellen Kern mit der Massenzahl A sind alle Zustände von (sd) n (mit $n = A - 16$) energetisch miteinander entartet, solange man von der (Einteilchen)-Spinbahnkopplung absieht. Die Zahl der miteinander entarteten Konfigurationen ist bereits in diesem 'kleinst-möglichen' Konfigurationsraum so groß (siehe Tabelle 1.3.2.), daß man - ohne zusätzliche Einschränkungen - im Augenblick eine konsequente Erweiterung - etwa durch Einschluß der 1p-Schale bzw. der (2p1f)-Schale - nicht durchführen kann. Darum stellt die (sd)-Schale einen guten Testfall für die in den vorangegangenen Kapiteln diskutierten Methoden dar. Außerdem eignet sich gerade die (sd)-Schale für derartige Untersuchungen besonders:

- einmal, weil man diesen Raum durch explizites Diagonalisieren der effektiven Wechselwirkung behandeln kann,
- und zum anderen, weil sich dabei gezeigt hat, daß in der Tat dieser Konfigurationsraum ausreicht, die Niederenergiespektren der betreffenden Kerne recht zufriedenstellend zu beschreiben (siehe hierzu z. B. Ref. 35, 43, 44, 45).

Solche realistischen Schalenmodellrechnungen wurden mit verschiedenen effektiven Zweiteilchenwechselwirkungen durchgeführt:

einmal unter Verwendung mikroskopisch berechneter effektiver Wechselwirkungen (siehe dazu Kapitel 1.2.). Dazu gehören insbesondere die Arbeiten von Kuo und Brown (Ref. 4, 5), Goode (Ref. 6), Preedom und Wildenthal (Ref. 46) und Barrett und Kirson (Ref. 7, 47, 48), um nur einige zu nennen.

Zum anderen mit phänomenologischen Restwechselwirkungen, deren Form frei gewählt wurde und deren Parameter dann an einige experimentelle Daten angepaßt wurden; hierzu gehören z. B. die MSDI-Wechselwirkung (Ref. 49), die MSI-Kraft (Ref. 29, 30) und Gauß-Kräfte.

Bei diesen Rechnungen zeigt sich, daß man mit mehreren verschiedenen Kräften eine etwa gleichwertige, befriedigende Beschreibung der Spektren erreichen kann. Der Grund für diese Tatsache liegt darin, daß in einem solchen, eingeschränkten Konfigurationsraum offenbar nicht alle Details der effektiven Zweiteilchenwechselwirkung gleich bedeutend sind. Das sieht man insbesondere daran, daß in diesem ganzen Konfigurationsraum insgesamt nur 63 Zweiteilchenmatrixelemente der Art:

$$\langle (sd)^2 \mid V_{eff} \mid (sd)^2 \rangle$$

möglich sind; mit anderen Worten, kennt man diese 63 Werte, dann ist damit das ganze Spektrum festgelegt. Offenbar sind - in dem eingeschränkten Konfigurationsraum - irgend zwei Kräfte äquivalent, sofern die entsprechenden Sätze von Matrixelementen einander gleich sind.

Aus oben gesagtem resultiert die Vermutung, daß nur einige bestimmte Eigenschaften der effektiven Wechselwirkung, die in den Zweiteilchenmatrixelementen verborgen sein müssen, besonders wichtig sind.

Ziel der nun folgenden Analyse ist es, diese Eigenschaften herauszufinden; dabei wollen wir uns von den in den vorhergehenden Kapiteln dargestellten Überlegungen leiten lassen und dementsprechend gruppentheoretische Methoden in diese Analyse einiger der oben erwähnten

effektiven Wechselwirkungen mit einbeziehen.

Denken wir nun an die konsequente Anwendung von Satz I auf das vorliegende Problem, so haben wir zwei Möglichkeiten für die Wahl der Zweiteilchenbasis:

- (i) Wir wählen als entarteten Modellraum die sd-Schale des harmonischen Oszillators. In diesem Fall (LS-Limit) kann die SU(3)-Basis aus (3.4.7.) als Basis von H_0 verwendet werden. Dann aber müssen wir den Einteilchenanteil von V_{eff} formal der effektiven Zweiteilchenwechselwirkung zuschlagen.
- (ii) Wir stecken den Einteilchenanteil von V_{eff} mit in H_0 , wodurch aber bereits der sd-Raum energetisch aufgespalten wird, d. h. als Basis von H_0 muß eine jj-gekoppelte Basis verwendet werden. Um wieder zu einem entarteten Modellraum zurückzukehren, müßten wir uns auf eine Unterschale $d_{5/2}$ (bzw. $s_{1/2}$, $d_{3/2}$) beschränken.

Das gruppentheoretische Problem besteht darin, daß eine SU(3)-Basis und eine jj-gekoppelte Basis zu völlig verschiedenen Gruppenketten gehören. Während die SU(3)-Basis durch Klassifikation von Vielteilchenzuständen nach der Kette (3.4.7.) zustande kommt, gehört eine jj-gekoppelte Basis zur Kette:

$$\begin{aligned} SU(4M) &\supset SU(2M) \times SU(2) \supset (SU(2j_+ + 1) \times SU(2j_- + 1)) \times SU(2) \\ &\supset [SO_{j_+}(3) \times SO_{j_-}(3)] \times SU(2) \supset SO_j(3) \times SU(2) \end{aligned}$$

Während wir also in der Basis (ii) den Einteilchenanteil von V_{eff} diagonalisieren können, verlieren wir andererseits alle Vorteile, die die SU(3)-Symmetrie des harmonischen Oszillators bietet, da die SU(3)-Gruppe aus der Kette (3.4.7.) nicht in obige Kette eingebaut werden kann.

Solange man keine übergeordnete Klassifikation gefunden hat, die in gewisser Verallgemeinerung Eigenschaften der SU(3)-Basis und (jj)-

Basis enthält, muß man sich für eine der beiden Basen (i) oder (ii) entscheiden.

Im folgenden haben wir die Basis (i) zur Untersuchung des Zweiteilchenanteils von V_{eff} gewählt. Es wird sich zeigen, daß diese Darstellung für die sd-Schale besonders gut geeignet ist. Außerdem läßt sich die Vernachlässigung des Einteilchenanteils dadurch rechtfertigen, daß in gg-Kernen Zustände der höchsten Ortssymmetrie (daraus folgt $S = 0$) das Niederenergiespektrum bestimmen (Ref. 50, 51; siehe auch die Ergebnisse der folgenden Kapitel); für diese Zustände gilt jedoch:

$$\langle \alpha, L, S=0, J=L \mid \sum_i \underline{e}_i \cdot \underline{s}_i \mid \alpha', L, S'=0, J=L \rangle = 0$$

(α und α' sind zusätzliche Parameter, die Zustände mit ansonsten gleichen Quantenzahlen unterscheiden). D. h. für die Spektren von gg-Kernen sind dominant der Zweiteilchenanteil von V_{eff} und dessen Symmetrien verantwortlich. Daher können wir die Ergebnisse über (approximative) Symmetrien des Zweiteilchenanteils auch an experimentellen Spektren von gg-Kernen testen.

4.2. Zentrale und nichtzentrale Anteile der effektiven (sd)-Wechselwirkung

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Methode angegeben, die es erlaubt, die verschiedenen Tensoranteile der effektiven (sd)-Wechselwirkung (Zentral-, Tensor-, LS- und ALS-Anteil) aus einem gegebenen, in der verwendeten Basis vollständigen Satz von Zweiteilchenmatrixelementen zu bestimmen; im Falle der (sd)-Schale sind dies - wie bereits erwähnt - insgesamt 63 Matrixelemente. Wie bereits in Kapitel 4.1. erläutert, werden wir eine $SU(3)$ -Basis für die Zweiteilchenzustände des (sd)-Raumes verwenden.

Mit dieser Methode werden dann 'realistische' effektive Wechselwirkungen in ihre Tensorkomponenten zerlegt; dabei werden sowohl mikroskopisch berechnete als auch phänomenologisch eingeführte Kräfte analysiert.

Die Einzelheiten der Methode und der durchgeführten Analyse sind in konsistenter Form in Anhang E zusammengefaßt. Wir zitieren hier nur die wesentlichen Ergebnisse dieser Untersuchung:

- (i) Die Zentralkraftanteile der verwendeten Kräfte stimmen relativ gut miteinander überein, trotz der im allgemeinen doch ziemlich verschiedenen 'Abstammung' der entsprechenden Wechselwirkungen (siehe z. B. Fig. 1 von Anhang E).
- (ii) Dieser Zentralkraftanteil weist einen deutlichen $SU(3)$ erhaltenden Charakter auf; die entsprechenden $SU(3)$ mischenden Anteile sind relativ klein.
- (iii) Die nichtzentralen Anteile der untersuchten Kräfte unterscheiden sich im allgemeinen beträchtlich (siehe Fig. 2 - 4 von Anhang E und Tabelle 2a, 2b, 3a, 3b). Daraus kann man schließen, daß offenbar der nichtzentrale Anteil der Kräfte nur unzureichend festgelegt ist.

Es sei noch erwähnt, daß die in Anhang E nicht in die Analyse aufgenommenen 'BHM'-Matrizelemente (Ref. 47) ebenfalls obige Ergebnisse bestätigen; diese BHM-Matrizelemente unterscheiden sich von den anderen mikroskopischen Matrizelementen durch eine 'exakte' Berechnung der Brückner'schen G-Matrix im endlichen Kern.

Um den Einfluß der verschiedenen Tensorkomponenten auf das berechnete Spektrum zu untersuchen, wird schließlich in Abschnitt 4 von Anhang E das Spektrum von ^{28}Si im einzelnen untersucht; dabei zeigt sich, daß - wie von der Analyse der Zweiteilchenmatrizelemente her zu erwarten - der Zentralanteil die dominante Rolle spielt. Von den nichtzentralen Anteilen erweist sich insbesondere der LS-Anteil als wichtig.

An diesem konkreten Beispiel wird das vermutlich für den gegenwärtigen Stand der Kernstrukturuntersuchungen typische Dilemma deutlich: einerseits gibt es eine (mehr oder weniger) dominante Symmetrie des nuklearen Vielteilchensystems (im hier untersuchten Fall der (sd)-Schale offenbar die $SU(3)$ -Symmetrie); andererseits gibt es auch

symmetriebrechende Anteile, die - zumindest im Fall von ^{28}Si - eine bedeutsame Rolle spielen.

Im folgenden Kapitel 4.3. wollen wir nun im einzelnen diesen symmetrieerhaltenden und -brechenden Effekt analytisch untersuchen, u. a. mit dem Ziel herauszufinden, wann die hier gefundene approximative $\text{SU}(3)$ -Symmetrie das Spektrum relativ gut zu beschreiben gestattet.

4.3. Analytische Darstellung der effektiven (sd)-Wechselwirkung

Zunächst wollen wir versuchen, eine analytische Ortsdarstellung der effektiven (sd)-Wechselwirkung anzugeben. Dabei gehen wir wieder von einem vollständigen Satz von (im Fall der (sd)-Schale 63) Zweiteilchenmatrixelementen aus. Offenbar hat man bei dieser Darstellung noch einige Freiheiten: diese sollen so ausgenutzt werden, daß die expliziten Darstellungen möglichst allgemein gelten und die vermutete $\text{SU}(3)$ -Symmetrie klar zum Ausdruck bringen.

Die Konstruktion der Zweiteilchenwechselwirkung führen wir im Impulsraum durch; dabei zeigt sich, - wie schon bei Knüpfner (Ref. 29, 30) in anderem Zusammenhang für rein zentrale Kräfte - daß die Zweiteilchenübergangsdichte im Impulsraum lokalisiert ist. Dies erlaubt eine vereinfachte Darstellung der Ortsraumabhängigkeit mit Hilfe einer separablen Wechselwirkung (siehe auch Kapitel 3.5.), die ein diskretes Fourierspektrum besitzt. Diese enthält explizit einen Quadrupol-Quadrupol-Anteil, der - wie in Kapitel 3.4 gezeigt - die $\text{SU}(3)$ -Symmetrie des Gesamtsystems bedingt. Damit ist dann auch derjenige Anteil der effektiven Wechselwirkung festgelegt, der zur $\text{SU}(3)$ -Symmetrie führt.

Diese Untersuchungen sind kompakt und in sich abgeschlossen in Anhang F zusammengestellt. Um die Radialabhängigkeit der einzelnen Multipol-Komponenten der effektiven Wechselwirkung zu bestimmen, beschränken wir uns - nach den Ergebnissen von Kapitel 4.2. - auf die Analyse der ASDI-Wechselwirkung.

Zur Beantwortung der im vorigen Abschnitt 4.2. angeschnittenen Frage werden schließlich die Spektren von drei typischen (sd)-Schalenkernen (es sind das die gg-Kerne ^{20}Ne , ^{24}Mg und ^{28}Si) berechnet und im Hinblick auf die sicherlich nur mehr oder weniger approximativ realisierte $\text{SU}(3)$ -Symmetrie untersucht (siehe Fig. 6, 7 und 8 von Anhang F).

Dabei zeigt sich, daß der Einfluß der $\text{SU}(3)$ brechenden Anteile auf die berechneten Spektren entscheidend vom Entartungsgrad des $\text{SU}(3)$ -Spektrums abhängt: Im Fall von ^{20}Ne ist diese Entartung gering; darum ist auch der Effekt der $\text{SU}(3)$ brechenden Kräfte (relativ) klein (siehe Fig. 6 von Anhang F).

Im Gegensatz dazu ist im anderen Extremfall, ^{28}Si , das $\text{SU}(3)$ -Spektrum stark entartet (siehe Fig. 8 von Anhang F); dementsprechend ist hier der Effekt der $\text{SU}(3)$ brechenden Anteile maximal. Darum beobachtet man auch hier im endgültigen Spektrum - trotz der starken $\text{SU}(3)$ erhaltenden Anteile - fast keine Ähnlichkeit mehr mit dem ursprünglichen $\text{SU}(3)$ -Spektrum. In diesem Zusammenhang spielt offenbar der Kern ^{24}Mg eine Zwischenrolle (siehe Fig. 7 von Anhang F).

Der Symmetriecharakter der Vielteilchenzustände bestimmt natürlich nicht nur die Spektren, sondern auch die Übergangswahrscheinlichkeit - z.B. für elektromagnetische Prozesse - sowie die Multipolmomente der betrachteten Zustände (vergleiche Anhang D). Es übersteigt jedoch den Rahmen der vorliegenden Arbeit, eine systematische Analyse dieses Aspekts für die (sd)-Schale durchzuführen, die über die in Anhang D und Anhang F dargestellten Ausführungen hinausgeht. In diesem Zusammenhang sei noch auf Untersuchungen von U. Merkt (Ref. 52) hingewiesen, die zeigen, daß $\text{SU}(3)$ -Rechnungen mit einem reinen $\text{SU}(3)$ -Zustand zu $(\lambda \ 0)$ als intrinsischem Zustand Werte für die Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb der Grundzustandsbande ergeben, die in sehr guter Übereinstimmung mit den 'Multi-Configuration-Hartree-Fock'-Rechnungen von A. Faessler et al. (Ref. 53) stehen.

4.4. Zusammenfassung

Die Ergebnisse des vorliegenden Kapitels können folgendermaßen kurz zusammengefaßt werden:

1. Es wurde eine Methode angegeben, die es gestattet, aus einer
 - in Form von Zweiteilchenmatrixelementen einer endlichen Basis
 - gegebenen Restwechselwirkung die darin enthaltenen Symmetrien herauszufinden. Aufgrund der Ergebnisse von Kapitel 3 haben wir in diesem Kapitel nach der vermuteten $SU(3)$ -Symmetrie gesucht. Die angegebene Methode ist jedoch in offenkundiger Weise auch für andere Symmetriegruppen anwendbar. (Man muß nur die in Tabelle 1 aus Anhang E entsprechende Basistransformation durchführen.)

Darüber hinaus konnten wir eine analytische Darstellung angeben, die die - im Rahmen der eingeschränkten Basis - relevanten Fourierkomponenten enthält.

2. Mit dieser Methode wurden eine Reihe effektiver Wechselwirkungen miteinander verglichen, die gegenwärtig bei Berechnung von (sd)-Schalenkernen verwendet werden.
3. Dabei wurde insbesondere der $SU(3)$ erhaltende Charakter der effektiven Wechselwirkung deutlich; aber auch die Bedeutung, die die Entartung des $SU(3)$ -Spektrums spielt im Hinblick auf die Effekte der $SU(3)$ brechenden Anteile der Wechselwirkung.

5. ZUSAMMENFASSUNG

Da wir die Ergebnisse der einzelnen Kapitel an den betreffenden Stellen meist schon gesondert zusammengefaßt haben, wollen wir hier auf eine nochmalige detaillierte Darstellung verzichten und vielmehr den allgemeinen Rahmen, in den diese Ergebnisse einzuordnen sind, und einige weiterführende Probleme diskutieren.

Mit Hilfe von Satz I haben wir einen neuartigen Aspekt in das entartete Schalenmodell eingeführt. Wir wissen aus Kapitel 1.3., daß die üblicherweise durch numerische Diagonalisation der effektiven Wechselwirkung gewonnenen Zustände auch Eigenzustände zu V_{eff} sein müssen.

Diese relativ einfache Erkenntnis ist einerseits befriedigend insofern, als wir selbst von einer numerischen Wellenfunktion mit im allgemeinen sehr vielen gleichmäßig großen (oder besser kleinen) Komponenten wenigstens eine Eigenschaft wissen.

Andererseits wirft diese Beobachtung Fragestellungen und Probleme auf, die wir in der vorliegenden Arbeit untersucht haben. Wir wollen diese nochmals stichpunktartig zusammenfassen:

- (i) was sind die Symmetrien, die dem entarteten Vielteilchensystem durch V_{eff} aufgeprägt werden;
- (ii) können wir diese Symmetrien bereits in V_{eff} identifizieren;
- (iii) was sind die entsprechenden Konstanten der Bewegung, d. h. Quantenzahlen, die die entsprechenden Zustände charakterisieren und damit ihre physikalischen Eigenschaften, durch die sie sich voneinander unterscheiden;
- (iv) welche Vielteilchenoperatoren sind in V_{eff} enthalten, deren Eigenwerte diese Charakterisierung der Zustände leisten.

Dazu noch einige allgemeine Erörterungen:

Die Frage nach denjenigen Vielteilchenoperatoren, die in V_{eff} enthalten sind, und deren Eigenwerte im Rahmen einer entarteten Basis die Zustände des Vielteilchensystems physikalisch charakterisieren, wurde im Rahmen dieser Arbeit wohl erstmals gestellt und kann durch eine Diagonalisation von V_{eff} nicht beantwortet werden. Daher stellt diese 'Symmetrieanalyse' einen neuartigen und zu mikroskopischen sowie phänomenologischen Methoden komplementären Aspekt der effektiven Wechselwirkung dar.

Natürlich kann man immer argumentieren, daß im Rahmen einer endlichen entarteten Basis von H_0 der Eigenwert von V_{eff} die Energieverschiebung des betreffenden Zustandes relativ zur ungestörten H_0 -Energie ist. Diese Argumentation ist jedoch vordergründig. Denn wir sahen an einer Reihe von entarteten Einteilchenproblemen (Kapitel 2), für die obige Fragestellungen mit gruppentheoretischen Methoden vollständig gelöst werden konnten, daß die Eigenwerte von H_{int} auch eine Symmetrie des Systems angeben, die durch die in H_{int} bereits vorhandenen Symmetrien geprägt ist.

Derartige Interpretationen konnten wir auch im Vielteilchenraum für eine Reihe von Modellansätzen für V_{eff} in Kapitel 3 geben. Beispielsweise haben wir in Kapitel 3.5. erwähnt, daß für die $SU(3)$ Lösungen das mittlere quadratische Vielteilchenquadrupolmoment eine Konstante der Bewegung ist. D. h. in den mit V_{QQ} berechneten Spektren unterscheiden sich energetisch nicht entartete Zustände durch $\langle Q^2 \rangle$, während entartete Zustände dasselbe $\langle Q^2 \rangle$ besitzen. Offensichtlich reicht aber nach den Ergebnissen von Kapitel 3 und Kapitel 4 diese Erhaltungsgröße noch nicht aus, um alle in H_0 entarteten Zustände voneinander zu unterscheiden. Diesen Effekt konnten wir auch schon bei den Einteilchenproblemen beobachten. Letztere nehmen aber insofern eine Sonderstellung ein, als dort H_{int} explizit vorgegeben ist und die verbleibende Entartung durch Hinzunahme zusätzlicher Wechselwirkungsterme aufgehoben werden muß.

Wie sich gezeigt hat, erlaubt uns die Gruppentheorie eine mathematische Formulierung obiger Punkte (i) - (iv). D. h. konkret,

wir müssen die in V_{eff} enthaltenen Vielteilchenoperatoren daraufhin untersuchen, ob sie mit Casimiroperatoren gewisser Gruppen bzw. Operatoren aus der maximalen toralen Unteralgebra (= Cartanunteralgebra im halbeinfachen Fall) der zugehörigen Gruppenalgebren identifiziert werden können. Eine Klassifikation der Basiszustände von H_0 nach Darstellungen dieser Gruppen liefert dann zunächst rein mathematische Symbole zur Kennzeichnung dieser Zustände. Die Eigenwerte der Vielteilchenoperatoren lassen sich dann durch diese gruppentheoretischen Symbole ausdrücken, die so eine physikalische Interpretation erlangen. An dieser Stelle muß noch eine wichtige, bereits in Kapitel 1.3. kurz erwähnte Tatsache angesprochen werden, deren tiefere Bedeutung erst mit Hilfe der Gruppentheorie erfaßt werden kann. Natürlich werden im allgemeinen H_0 und H_{int} aus Kapitel 1.3., Satz 1, als Operatoren im vollen Hilbertraum nicht miteinander kommutieren. Jedoch führt die Beschränkung auf einen entarteten Modellraum dazu, daß H_0 und H_{int} als Operatoren auf diesem Raum miteinander kommutieren. Wie dies möglich ist, haben uns die Beispiele aus Kapitel 2 und 3 (insbesondere Stark-Effekt, deformierter Oszillator und V_{QQ}) gezeigt. In diesen Fällen wurde die explizit vorgegebene Wechselwirkung H_{int} bei Beschränkung auf den entarteten Raum äquivalent zu Operatoren der Symmetriegruppe von H_0 . Als solche müssen sie natürlich mit H_0 kommutieren.

Daraus können wir schließen, daß der echte Operator und sein gruppentheoretisches Äquivalent im entarteten Modellraum in ihren expliziten Darstellungen nicht übereinstimmen müssen. Dies bringt natürlich eine weitere Schwierigkeit mit sich, so daß u. U. die Identifikation von Vielteilchenoperatoren mit im obigen Sinne äquivalenten Gruppenoperatoren überhaupt nur durch Vergleich ihrer Eigenwerte möglich ist.

Wie kann man nun in konkreten Fällen vorgehen, um das in (i) - (iv) angegebene Programm durchzuführen und die in der Kernstruktur vorhandenen Symmetrien herauszufinden?

Wir haben im Rahmen dieser Arbeit im wesentlichen drei Wege besprochen:

- a) Konstruktion von Modellwechselwirkungen, für die die Frage nach den resultierenden Symmetrien des Vielteilchensystems gruppentheoretisch gelöst werden kann (siehe Kapitel 3).
- b) Untersuchung von gegebenen, bereits mit Erfolg verwendeten, effektiven Zweiteilchenwechselwirkungen (vergleiche Kapitel 4.2.).
- c) Da offensichtlich in einem eingeschränkten Modellraum nicht alle Eigenschaften von V_{eff} wichtig sind, kann man diese Tatsache dazu ausnutzen, eine möglichst einfache analytische Darstellung zu erhalten (vergleiche Kapitel 4.3.), so daß man an der Zweiteilchenwechselwirkung bereits Symmetrien des Vielteilchensystems ablesen kann.

Wie die Analyse von Kapitel 4 gezeigt hat, konnten die in Kapitel 3 behandelten Modelle zum Teil als Grenzfälle von realistischen effektiven Wechselwirkungen identifiziert werden. Dies ist insofern befriedigend, wenn man an einer mehr oder weniger schematischen, modellmäßigen Diskussion von Kerneigenschaften interessiert ist. Man ist nämlich aufgrund der Ergebnisse von Kapitel 4 in der Lage, eine Analyse davon zu geben, was letztlich an Strukturen in den umfangreichen und aufwendigen Schalenmodelldiagonalisationen steckt.

Wir müssen uns jedoch darüber klar sein, daß mit den bisher behandelten Modellen und Methoden gewisse Einschränkungen und Schwierigkeiten verbunden sind:

- a) Wegen der Einteilchen-(1-s)-Wechselwirkung ist die (sd)-Schale kein völlig entartetes System, und wir haben in unseren Modellen diesem Anteil von V_{eff} nicht Rechnung getragen.
- b) Nach einer Vordagonalisierung - etwa im $SU(3)$ -Schema - kann selbst ein u. u. schwacher symmetriebrechender Rest noch große Effekte hervorrufen, wenn Entartungen im

vordagonalisierten Spektrum vorhanden sind (vergleiche Kapitel 4.3., ²⁸Si).

γ) Im allgemeinen können Anteile der Wechselwirkung zu verschiedenen Symmetrien vorhanden sein, die nicht gleichzeitig diagonalisiert werden können (z. B. (1's)-Wechselwirkung und deformiertes Oszillatorpotential).

δ) In unserer Analyse sind wir stets von effektiven Zweiteilchenwechselwirkungen ausgegangen. Es ist jedoch durchaus möglich, daß bei vielen Nukleonen außerhalb abgeschlossener Schalen effektive Vielteilchenkräfte eine gewisse Rolle spielen.

Natürlich wäre es wünschenswert, die sicherlich in konkreten Situationen nur mehr oder weniger realisierte SU(3)-Symmetrie durch Einführen weiterer Symmetriegruppen zu verallgemeinern bzw. zu ergänzen und damit einen weiteren Schritt in Richtung Experiment zu schaffen.

In diesem Zusammenhang sind vor allem zwei in den vorhergehenden Kapiteln bereits angesprochene Probleme interessant.

- Einmal kann man daran denken, die in Kapitel 3.5. aufgeführte Reihe von Multipoloperatoren auf ihre gruppentheoretischen Eigenschaften hin zu untersuchen und zu versuchen, durch Hinzunahme weiterer Multipolaritäten - zusätzlich zu dem bisher betrachteten Fall $\lambda = 2$ - den Zweiteilchenanteil von V_{eff} zu erweitern.
- Zum anderen haben wir bisher den Einteilchenanteil von V_{eff} , der sicherlich in ug-Kernen wichtig ist, noch nicht berücksichtigt. Eine gemeinsame Behandlung von Ein- und Zweiteilchenanteil sollte aber nach Satz 1 möglich sein. Eine gruppentheoretische Lösung ist jedoch sicherlich ausgeschlossen, solange man spinunabhängige Zweiteilchenanteile (wie V_{QQ}) verwendet und den Einteil-

chenanteil durch eine (l-s)-Wechselwirkung darstellt.
Gewisse Ansätze einer Verallgemeinerung auf gruppen-
theoretischer Basis scheinen jedoch möglich (Ref. 54).

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß sich in den vorher-
gehenden Kapiteln folgendes gezeigt hat: Die Lösung eines Einteil-
chenproblems ermöglicht auch die Lösung des entsprechenden Viel-
teilchenproblems.

(Quadrupolstörung im Oszillator - QQ-Wechselwirkung;
Dipolstörung im Coulombfeld - Dipol-Dipol-Wechselwirkung)

Daraus können wir schließen, daß es zur Lösung eines Vielteil-
chenproblems hilfreich sein kann, gleichzeitig das zugehörige
Einteilchenproblem zu studieren.

Die zu derartigen Untersuchungen notwendigen Methoden und Problem-
stellungen wurden im Verlauf der Arbeit bereitgestellt und an
mehreren Beispielen ausführlich diskutiert. Es ist klar, daß die im
Rahmen dieser Arbeit formulierten Fragestellungen eine Reihe wei-
terer Untersuchungen - etwa im oben erwähnten Sinne - nach sich
ziehen müssen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. B. H. Brandow, Rev. Mod. Phys. 39, (1967) 771
2. M. B. Johnson und M. Baranger, Ann. Phys. 62 (1971) 172
3. B. R. Barrett und M. W. Kirson, in Advances in Nuclear Physics, Vol. 6 (1973)
4. T. T. S. Kuo und G. E. Brown, Nucl. Phys. 85, (1966) 40
5. T. T. S. Kuo, Nucl. Phys. A 103, (1967) 71
6. P. Goode, Phys. Lett. 51 B, (1974) 429
7. B. R. Barrett und M. W. Kirson, Nucl. Phys. A 148 (1970) 145
8. B. R. Barrett, Phys. Lett. 38 B, (1972) 371
9. T. H. Schucan und H. A. Weidenmüller, Ann. Phys. (N.Y.) 73, (1972) 108
10. H. M. Hofmann, Habilitationsschrift, Erlangen (1976)
11. S. G. Nilsson, Dan. Mat. Fys. Modd. 29, no. 16 (1955)
12. K. Klingenberg, in Vorbereitung
13. Y. Akiyama, A. Arima und T. Sebe, Nucl. Phys. A 138, (1969) 273
14. M. J. Englefield, in Group Theory and the Coulomb Problem, J. Wiley and Sons, Inc.
15. J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer Verlag, 1972
16. V. Fock. Z. Phys. 98, (1936) 145
17. L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. 2, (1961) 433
18. J. J. Klein, Am. J. Phys. 34, (1966) 1039
19. M. Moshinsky, J. Math. Phys. 4, (1963) 1128
20. M. Hamermesh, in Group Theory and Its Application to Physical Problems, Addison-Wesley Publ. Comp.
21. H. Börner, In Darstellungen von Gruppen, Springer-Verlag
22. B. G. Wybourne, in Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy, John Wiley and Sons, Inc.

23. K. Klingenberg, in Vorbereitung
24. F. Arima, Argonne Sommerschule (1971)
25. M. Moshinsky, in Physics of Many-Particle Systems, Gordon and Breach, New York, 1965
26. J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc., A 245, (1958) 127
27. P. Franzini, L. A. Radicati, Phys. Lett. 6, (1963) 322
28. M. Harvey, in Advances in Nuclear Physics, Vol. 1, Plenum Press, New York (1968)
29. W. Knüpfer, Dissertation, Erlangen (1972)
30. W. Knüpfer, M. G. Huber, zur Veröffentlichung an Phys. Rev. C
31. M. Danos, L. C. Maximon, J. Math. Phys. 6, (1965) 766
32. M. Moshinsky, private Mitteilung
33. M. Moshinsky, in The Harmonic Oscillator in Modern Physics, Gordon and Breach, New York, 1969
34. J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A 245, (1958) 562
35. E. C. Halbert, J. B. McGrory, B. H. Wildenthal und S. P. Pandya, in Advances in Nuclear Physics, Vol. 1 (1971)
36. P. Federman und L. Zamick, Phys. Rev. 177, (1969) 1534
37. A. M. Kleinfeld, K. P. Lieb, D. Werdecker und K. Smilansky, Phys. Rev. Lett. 35, (1975) 1329
38. K. Klingenberg, zur Veröffentlichung an Phys. Rev. C
39. T. Engeland und P. J. Ellis, Nucl. Phys. A 181, (1972) 368
40. S. Shlomo und R. Moreh, Nucl. Phys. A 110, (1968) 204
41. T. Engeland und P. J. Ellis, Nucl. Phys. A 144, (1970), 161
42. T. K. Li, D. Dehnhard, R. E. Brown und P. J. Ellis, Phys. Rev. C 13, (1976) 55
43. F. Meurders, P. W. M. Glaudemans, J. F. A. van Hienen, G. A. Timmer, Z. Phys., (1976) 113
44. B. H. Wildenthal, E. C. Halbert, J. B. McGrory, T. T. S. Kuo, Phys. Rev. C, (1971) 1266

45. R. R. Whitehead, A. Watt, Phys. Lett., (1972) 7
46. B. M. Freedom, B. H. Wildenthal, Phys. Rev. 66, (1972), 1633
47. B. R. Barrett, R. G. L. Hewitt und R. J. McCarthy,
Phys. Rev. C (1970) 1199; Phys. Rev. C (1971), 1137
48. B. R. Barrett und M. W. Kirson, Phys. Lett., (1975) 129
49. P. W. M. Glaudemans, P. J. Brussard, B. H. Wildenthal,
Nucl. Phys. A 102, (1967) 593
50. T. Inoue, T. Sebe, H. Hagiwara, A. Arima,
Nucl. Phys. 59, (1964) 1
51. P. Manakos, Z. Phys. 247, (1971) 127
52. U. Merkt, Diplomarbeit, Erlangen, 1975
53. K. W. Schmid, L. Satpathy und A. Faessler, Z. Phys. 267,
(1974) 345
54. M. Moshinsky, private Mitteilung

ANHANG A

Zur Gruppentheorie des harmonischen Oszillators

(i) Einteilchenzustände

Im folgenden wird das harmonische Oszillatorpotential mit H_0 bezeichnet.

Zunächst sollen Einteilchenzustände von H_0 , die wir in Abschnitt 2.3. verwendeten, von einem gruppentheoretischen Standpunkt her etwas genauer betrachtet werden (Ref. 25, 33). Es erweist sich dabei als zweckmäßig, die Sprache der zweiten Quantisierung zu verwenden.

Im weiteren wird die Konvention $\hbar = m = \omega = 1$ verwendet, d. h. alle Energien werden in Einheiten von $\hbar\omega$ [MeV] gemessen und Längen in Einheiten des Oszillatorparameters $b = \sqrt{\hbar/m\omega}$ [fm].

H_0 läßt sich dann schreiben:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{q=0, \pm 1} (-1)^q (p_q p_{-q} + x_q x_{-q}) \quad (A1)$$

wobei x_q und p_q die sphärischen Komponenten des Orts- bzw. Impulsvektors bezeichnen.

Wir definieren Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Oszillatorquanten durch:

$$a_q^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_q - i p_q) ; \quad a_q^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^q (x_{-q} + i p_{-q}) \quad (A2)$$

$$a_q^{+q} = (-1)^q a_{-q}^+ ; \quad a_q^- = (-1)^q a_{-q}^-$$

mit den Kommutatorrelationen

$$[a_q^-, a_{q'}^+] = \delta_{q, q'} \quad (A3)$$

$$[a_q^-, a_{q'}^-] = [a_q^+, a_{q'}^+] = 0$$

Weiter definieren wir die Operatoren

$$c_q^{q'} = a_q^+ a_q^{q'} \quad (A4)$$

Aus (A3) folgt dann:

$$[c_q^{q'}, c_{q''}^{q'''}] = c_q^{q'''} \delta_{q''}^{q'} - c_{q''}^{q'} \delta_q^{q'''} \quad (A5)$$

Das heißt, die Operatoren $c_q^{q'}$ spannen eine Operatoralgebra auf, die mit der Algebra der Gruppe $U(3)$ identisch ist. Ferner kommutiert H_0 mit allen Operatoren $c_q^{q'}$, d. h. die $U(3)$ ist Symmetriegruppe von H_0 und somit bilden die Eigenzustände von H_0 eine Basis für irreduzible Darstellungen $\{f_1 f_2 f_3\}$ der $U(3)$. (Zustände der N -ten Oszillatorschale gehören zu $\{f_1 f_2 f_3\} = (N, 0, 0)$).

Es ist mathematisch zweckmäßig und physikalisch äquivalent, anstelle der $U(3)$ die Gruppe $SU(3)$ zu verwenden. Die irreduziblen Darstellungen der $SU(3)$ lassen sich durch zwei Zahlen λ und μ kennzeichnen, wobei $\lambda = f_1 - f_2$ und $\mu = f_2 - f_3$ ist. λ und μ sind die Entwicklungskoeffizienten des höchsten Gewichtes, das die irreduzible Darstellung (λ, μ) der $SU(3)$ charakterisiert, nach den dominanten Fundamentalgewichten der $SU(3)$ (Ref. 15). Es ist in der Literatur üblich (Ref. 26), die irreduziblen Darstellungen (λ, μ) der $SU(3)$ zur Charakterisierung von Zuständen im harmonischen Oszillator zu verwenden. Das harmonische Oszillatorpotential H_0 besitzt demnach eine größere Symmetriegruppe als die Drehgruppe $SO(3)$, nämlich die $SU(3)$. Diese $SU(3)$ Symmetrie ist für die zusätzliche Entartung von Zuständen zu gleichem N und $l = N, N-2, \dots, 0$ oder 1 verantwortlich.

Die $c_q^{q'}$ bilden vom Standpunkt der Drehgruppe einen gemischten Tensor vom Rang 2, der in folgende irreduzible sphärische Tensoren zerlegt werden kann:

- a) symmetrischer spurloser Tensor
(sphärischer Tensor vom Rang 2)

$$Q_m = \sqrt{\frac{5}{3}} \sum_{q', q''} (1q' 2m | 1q'') c_{q''}^{q'} \quad (A6)$$

$$= (-1) \sum_{q', q''} (1q' 1q'' | 2m) a_{q''}^+ a_{q'} = -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{2m}(a^+)$$

- b) antisymmetrischer Tensor
(sphärischer Tensor vom Rang 1)

$$L_q = \sqrt{2} \sum_{q', q''} (1q' 1q'' | 1q) c_{q''}^{q'} \quad ; (q=0, \pm 1) \quad (A7)$$

- c) Spur
(sphärischer Tensor vom Rang 0)

$$H_0 = \sum_q c_q^q \quad (A8)$$

Q_m , L_q und H_0 können äquivalent zu den $c_q^{q'}$ als Erzeugende der $U(3)$ verwendet werden. Der Übergang von den Erzeugenden $c_q^{q'}$ zu den Erzeugenden Q_m , L_q und H_0 entspricht einem Basiswechsel in der $U(3)$ -Algebra. Die Bezeichnungen in (A6) - (A8) sind evident. Die Algebra der Gruppe $SU(3)$ entsteht aus der $U(3)$ -Algebra durch Entfernen des Operators H_0 .

Die Kommutatoren der Q_m und L_q lassen sich mit Gleichung (A6), (A7) und (A5) berechnen. Man erhält:

$$[L_q, L_{q'}] = -\sqrt{2} (1q 1q' | 1q+q') L_{q+q'}$$

$$[Q_q, L_{q'}] = -\sqrt{6} (2q 1q' | 2q+q') Q_{q+q'} \quad (A9)$$

$$[Q_q, Q_{q'}] = \frac{1}{2} \sqrt{10} (2q 2q' | 1q+q') L_{q+q'}$$

Da die Gruppe $SU(3)$ den Rang 2 besitzt, gibt es eine maximale Menge von zwei miteinander kommutierenden Operatoren. Aus Gleichung (A9) entnimmt man sofort folgende Relationen:

$$[Q_0, L_0] = 0 \quad ; \quad [Q_{\pm 2}, Q_0] = 0 \quad (A10)$$

$$[Q_{\pm 2}, L_0] = \mp 2 Q_{\pm 2} \quad ; \quad [Q_2, Q_{-2}] = L_0$$

Das bedeutet, daß $Q_{\pm 2}$ und L_0 eine Unter algebra der $SU(3)$ -Algebra aufspannen. Definiert man

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} L_0 \quad , \quad \mathcal{L}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\pm 2} \quad (A11)$$

so erhält man aus (A10)

$$[\mathcal{L}_{\pm}, \mathcal{L}_0] = \mp \mathcal{L}_{\pm} \quad , \quad [\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-] = -\mathcal{L}_0 \quad (A12)$$

Das sind die Kommutatorrelationen der drei infinitesimalen Operatoren der $SU(2)$ -Gruppe. D. h. die Operatoren $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{\pm}$ beschreiben eine $SU(2)$ -Untergruppe der $SU(3)$. Q_0 kommutiert mit $Q_{\pm 2}$ und L_0 und beschreibt eine $U(1)$ Untergruppe. Die Operatoren $Q_{\pm 2}, L_0$ und Q_0 definieren also das direkte Produkt $SU(2) \times U(1)$ als Untergruppe der $SU(3)$.

Der Casimiroperator der $U(3)$ ist per. def. gegeben durch:

$$G = \sum_{q, q'} c_{q'}^{q'} c_q^q \quad (A13)$$

Mit (A13), (A6), (A7) und (A8) kann man unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen für die CG-Koeffizienten zeigen:

$$G = Q^2 + \frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{3} H_0^2 \quad (A14)$$

$$(Q^2 = \sum_m (-1)^m Q_m Q_{-m} \quad ; \quad L^2 = \sum_q (-1)^q L_q L_{-q})$$

(ii) Vielteilchenzustände

Wir gehen nun zur Diskussion von n-Nukleonenzuständen in einer Oszillatorschale von H_0 über, die in zweiter Quantisierung homogene Polynome vom Grade n in Erzeugern $b_{\mu s}^+$ sind, wobei μ Ortsquantenzahlen (l, m) und s die Spin- und Isospinquantenzahlen (σ, τ) kennzeichnen. Für festes N, also in einer Oszillatorschale, gibt es

$$M = \sum_{\ell=0 \text{ od. } 1}^N (2\ell+1) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2) \quad (\text{A15})$$

Einteilchenortszustände.

Daher sind die Operatoren $e_{\mu s}^{\mu' s'} = b_{\mu s}^+ b^{\mu' s'}$ Erzeugende der Gruppe U (4 · M) (mit M aus (A15)) und die Erzeugenden der Untergruppe U(M) sind gegeben durch:

$$e_{\mu}^{\mu'} = \sum_{\sigma, \tau} b_{\mu \sigma \tau}^+ b^{\mu' \sigma \tau} \quad (\text{A16})$$

Diese Operatoren erfüllen nämlich die Kommutatorregeln

$$[e_{\mu s}^{\mu' s'}, e_{\mu'' s''}^{\mu'' s''}] = \delta_{\mu'' s''}^{\mu' s'} e_{\mu s}^{\mu'' s''} - \delta_{\mu s}^{\mu'' s''} e_{\mu'' s''}^{\mu' s'} \quad (\text{A17})$$

und aus (A16) folgt:

$$[e_{\mu}^{\mu'}, e_{\mu''}^{\mu''}] = \delta_{\mu''}^{\mu'} e_{\mu}^{\mu''} - \delta_{\mu}^{\mu''} e_{\mu''}^{\mu'} \quad (\text{A18})$$

Die Operatoren $c_q^{q'}$ aus (A4) sind (spin- und isospinunabhängige) Einteilchenoperatoren und können wie üblich in zweiter Quantisierung durch die Erzeugenden $e_{\mu}^{\mu'}$ der U(M) ausgedrückt werden:

$$\mathcal{E}_q^{q'} = \sum_{\mu, \mu'} \langle \mu | c_q^{q'} | \mu' \rangle e_{\mu}^{\mu'} \quad (\text{A19})$$

Mit Hilfe von (A5) und (A17) verifiziert man leicht

$$[\mathcal{E}_q^{q'}, \mathcal{E}_q^{q''}] = \mathcal{E}_q^{q''} \delta_q^{q'} - \mathcal{E}_q^{q'} \delta_q^{q''} \quad (\text{A20})$$

Da die $\mathcal{E}_q^{q'}$ Linearkombinationen von Erzeugenden der $U(N)$ sind (wegen (A19)), folgt aus (A20), daß die $\mathcal{E}_q^{q'}$ Erzeugende einer Untergruppe $U(3)$ von $U(M)$ sind.

Die Einteilchenoperatoren Q_m aus (A6) lassen sich ebenfalls durch die $e_\mu^{\mu'}$ ausdrücken. Eine Berechnung ihrer Ortsraumdarstellung führt uns aber direkt auf die QQ-Wechselwirkung. Denn aus (A6), (A4) und (A2) folgt:

$$\begin{aligned} Q_m &= -\frac{1}{2} \sum_{q', q''} (1_{q'} 1_{q''} | 2_m) (X_{q'} X_{q''} + P_{q'} P_{q''}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left[r^2 Y_{2m}(\hat{r}) + p^2 Y_{2m}(\hat{p}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A 21})$$

Da wir H_0 als harmonisches Oszillatorpotential vorausgesetzt haben, sind die Matrixelemente einer Funktion $f(\underline{r})$ dieselben, wie die der entsprechenden Funktion der Impulskoordinaten $f(\underline{p})$. Daher ist Q_m in zweiter Quantisierung äquivalent zu dem Operator $\mathcal{E}_m$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &:= \sum_{\mu, \mu'} \langle \mu | Q_m | \mu' \rangle e_\mu^{\mu'} \\ &= -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \sum_{\mu, \mu'} \langle \mu | r^2 Y_{2m}(\hat{r}) | \mu' \rangle e_\mu^{\mu'} \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

dessen Ortsdarstellung, bis auf triviale Faktoren, dem üblichen Quadrupoloperator von n-Teilchen entspricht.

$$\mathcal{E}_m = -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \sum_{i=1}^n r_i^2 Y_{2m}(\hat{r}_i) \quad (\text{A23})$$

Wegen dieser Zuordnung kann der Operator

$$\mathcal{E}^2 = \sum_{m=-2}^{+2} (-1)^m \mathcal{E}_m \mathcal{E}_{-m} \quad (\text{A24})$$

als Wechselwirkung zwischen dem Quadrupol von Teilchen i mit dem von Teilchen k interpretiert werden. Man muß jedoch beachten, daß in (A24) auch Terme mit $i = k$ enthalten sind, die proportional zu r^4 sind und als Modifikation zu H_0 betrachtet werden können.

Da die Relation (A14) auch für die entsprechenden Operatoren in zweiter Quantisierung gilt, können wir schreiben:

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{G} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 - \frac{1}{3} \mathcal{H}_0^2 \quad (\text{A25})$$

mit

$$\mathcal{G} = \sum_{q, q'} \mathcal{E}_q^{q'} \mathcal{E}_{q'}^q$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_q \mathcal{E}_q^q = N \cdot \sum_{\mu} \mathcal{E}_{\mu}^{\mu}$$

und

$$\mathcal{L}^2 = \sum_q (-1)^q \mathcal{L}_q \mathcal{L}_{-q}$$

$$\mathcal{L}_q = \sum_{\mu, \mu'} \langle \mu | L_q | \mu' \rangle \mathcal{E}_{\mu}^{\mu'}$$

Gleichung (A25) stellt eine Relation dar, die die QQ-Wechselwirkung aus (A24) durch den Casimiroperator $\mathcal{G}$ der in (A20) definierten Gruppe $U(3)$, den Casimiroperator $\mathcal{L}^2$ der $SO(3)$ -Untergruppe und einen Operator $\mathcal{H}_0$, der mit allen Erzeugenden der $U(3)$ kommutiert, ausdrückt.

Daher ist diese QQ-Wechselwirkung in Zuständen, die zu irreduziblen Darstellungen der $SU(3)$ und ihrer Untergruppe $SO(3)$ gehören, diagonal.

ANHANG B

Zur Quadrupoldeformation des harmonischen Oszillator- potentials

In Abschnitt 2.3. haben wir gesehen, daß die Eigenschaften der $SU(3)$ -Algebra zu einer mathematisch eleganten Lösung des quadrupolartig deformierten Oszillatorpotentials herangezogen werden können. Um diese Methode zu veranschaulichen und ihren physikalischen Gehalt zu diskutieren, wird in diesem Anhang der besonders einfache Fall der sd-Schale ($N = 2$) behandelt.

Wie in 2.3. diskutiert, sind die Eigenfunktionen zu

$$H = H_0 + H_{int} \quad ; \quad H_{int} = R^2 Y_{20} \quad (B1)$$

identisch mit den Eigenfunktionen zu H_0 und zu den Gruppenoperatoren Q_0 und L_0 aus (2.3.5.), die mit $|N\epsilon K\rangle$ bezeichnet wurden. Die Bestimmung der Eigenwerte ϵ und K , die für gegebenes N (d. h. für eine gegebene Darstellung $(\lambda\mu) = (N0)$ der $SU(3)$) auftreten, ist ein rein gruppentheoretisches Problem und kann durch die Reduktion $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ gelöst werden (etwa mit Hilfe von Young-Tableaux oder Plethysmen).

In dem einfachen Fall der sd-Schale können wir das Problem jedoch auch sehr schnell auf konventionelle Weise lösen, nämlich durch Diagonalisation der Operatoren Q_0 und L_0 in der gewohnten Drehimpulsbasis $|N\ell m\rangle$. Da L_0 diagonal in der Basis $|N\epsilon K\rangle$ ist, können in der sd-Schale nur die Zustände $|N\ell m\rangle = |200\rangle$ bzw. $|220\rangle$ durch Q_0 miteinander gemischt werden. Es bleibt also nur eine 2×2 Matrix zu diagonalisieren.

Die Zustände $Q_0 |N\ell m\rangle$ lassen sich mit Hilfe folgender Darstellung der $|N\ell m\rangle$ durch Erzeuger und Vernichter einfach berechnen:

$$|N\ell m\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}(N-\ell)} \sqrt{\frac{4\pi}{(N+\ell+1)!!(N-\ell)!!}}^{-1/2} \quad (B2)$$

$$\cdot (a^+ a^+)^{\frac{1}{2}(N-\ell)} y_{\ell m}(a^+) |\bar{0}\rangle$$

$|\bar{0}\rangle$ bezeichnet hier den Oszillatorgrundzustand)

Q_0 ist nach Gleichung (A6) gegeben durch

$$Q_0 = \frac{1}{16} (a_1^+ a^1 + a_{-1}^+ a^{-1} - 2a_0^+ a^0) \quad (B3)$$

Wegen der Kommutatorrelationen von Gleichung (A3) ist a^1 angewandt auf ein Polynom in den a_q^+ (wie etwa $|N\ell m\rangle$ aus (B2)) nichts anderes als $\partial/\partial a_q^+$. Daher erhält man $Q_0|N\ell m\rangle$ nach (B3) aus (B2) durch einfaches 'Differenzieren'. Wie bereits erwähnt, sind die Zustände $|N\ell m\rangle$, $m \neq 0$ bereits Eigenzustände zu Q_0 , und für $m = 0$ ist eine 2×2 Matrix zu diagonalisieren. Die Ergebnisse sind in Tabelle B1 zusammengestellt.

Tabelle B 1

Eigenschaften der Wellenfunktionen $|N\ell K\rangle$ von Gleichung (2.3.5.) für $N = 2$

Eigenzustände $ 2\ell K\rangle$	ϵ	K	λ	Massenquadrupol- moment q
$\sqrt{2/3} 200\rangle + \sqrt{1/3} 220\rangle$	$\sqrt{2/3}$	0	1	- 2.
$\sqrt{1/3} 200\rangle - \sqrt{2/3} 220\rangle$	$-\sqrt{2/3}$	0	0	+ 4
$ 221\rangle$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2/3}$	1	$1/2$	+ 1
$ 222\rangle$	$\sqrt{2/3}$	2	1	- 2
$ 22-1\rangle$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2/3}$	-1	$1/2$	+ 1
$ 22-2\rangle$	$\sqrt{2/3}$	-2	1	- 2

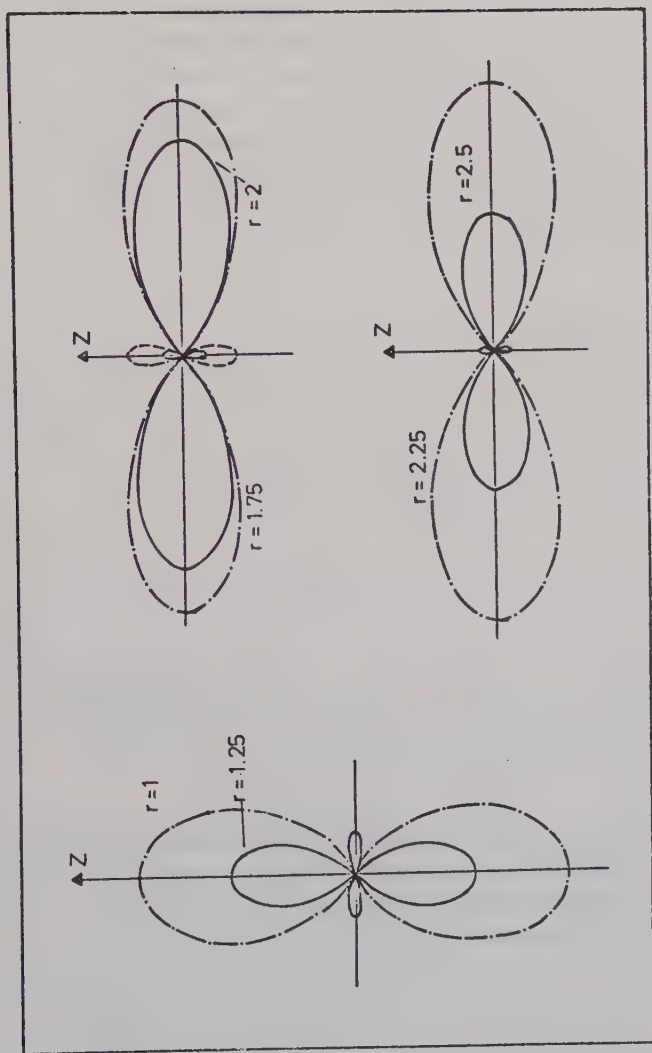


Fig. B 1:

Polardiagramm für die Dichte ρ des Zustandes $|N \in K\rangle = |2, \sqrt{2/3}, 0\rangle$. Weitere Erklärungen siehe Text.

Die erste Spalte enthält die Zustände $|2\epsilon k\rangle$ als 'Linearkombination' der Zustände $|2\ell m\rangle$ (natürlich gilt $m = k$). Spalte 2 bzw. 3 gibt die Eigenwerte ϵ von Q_0 bzw. K von L_0 in den betreffenden Zuständen an. Der Vollständigkeit halber ist in Spalte 4 eine weitere gruppentheoretische Quantenzahl Λ angegeben, die mit dem Eigenwert $\Lambda(\Lambda+1)$ des Casimiroperators der $SU(2)$ Untergruppe identisch ist.

Nach Gleichung (2.3.16.) kann Q_0 mit dem Massenquadrupoloperator $Q_0^{(2)}$ identifiziert werden.

$$Q_0^{(2)} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\hat{r}) \quad (B4)$$

$$Q_0^{(2)} = -\sqrt{6} b^2 Q_0 \quad (B5)$$

(Beachte, daß in Abschnitt 2.3. die Einheiten $\hbar = m = \omega = 1$ verwendet wurden. Daher tritt in (B5) der Faktor $b^2 = \hbar/m\omega$ auf.)

Nach Gleichung (B5) sind also die Zustände $|N\epsilon k\rangle$ Eigenzustände zum Quadrupoloperator $Q_0^{(2)}$ mit Eigenwerten $(-\sqrt{6})b^2 \cdot \epsilon$. Diese Eigenwerte sind in der letzten Spalte von Tabelle B1 in Einheiten des Oszillatorparameters b^2 angegeben und mit q bezeichnet.

Diese Identifikation von ϵ mit Eigenwerten des Quadrupoloperators zeigt uns die physikalische Interpretation der gruppentheoretischen Quantenzahl ϵ . Denn das Massenquadrupolmoment q und damit ϵ mißt die Deformation des Zustandes $|N\epsilon k\rangle$. $q > 0$, d. h. $\epsilon < 0$ ($q < 0$, d. h. $\epsilon > 0$) bedeutet prolate (oblate) Deformation. Die Veranschaulichung dieses Sachverhalts ist in Figur B 1 und Figur B 2 dargestellt.

Figur B1 zeigt das Polardiagramm für die Dichte ρ des Zustandes $|N\epsilon k\rangle = |2, \frac{1}{2}, 0\rangle$. Natürlich hängt ρ von der radialen Koordinate

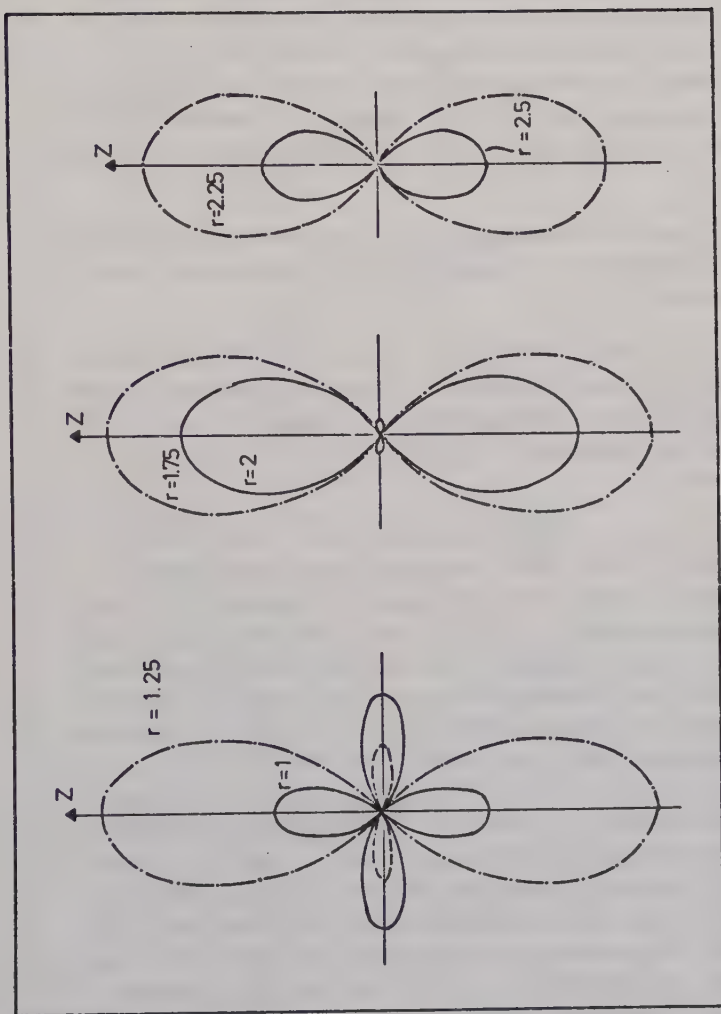


Fig. B 2: Wie Fig. B 1 für $|N=K\rangle = |2, -2, 0\rangle$

ab und daher ist die Dichteverteilung für verschiedene Werte von r (r in Einheiten des Oszillatorparameters b) gezeigt. Alle Figuren sind rotationssymmetrisch um die z -Achse. Man erkennt deutlich, daß für $r \leq 1$ eine prolata Deformation vorliegt, die für $r > 1.5$ sehr schnell in eine ausgeprägte, oblate Deformation umschlägt. Da zur Berechnung von q die Dichte jedoch mit r^4 gewichtet wird, besitzt der Zustand $|2, \sqrt{2/3}, 0\rangle$ letztlich ein negatives Massenquadrupolmoment.

Figur B2 zeigt das Polardiagramm von q für $|N \in K\rangle = |2, -2\sqrt{2/3}, 0\rangle$. Hier beobachten wir eine ausgeprägte prolata Deformation, die zu $q = +4$ führt.

Auch für die verbleibenden Zustände $|2 \in K\rangle$ mit $K \neq 0$ läßt sich der Eigenwert ϵ mit der Deformation der Dichte in Zusammenhang bringen. Die entsprechenden Polardiagramme sind identisch mit denen der bekannten Kugelflächenfunktion Y_{21} bzw. Y_{22} und sind deshalb nicht angegeben.

Gehen wir nochmals zurück zur Gleichung (2.3.7.) bzw. (2.3.18.) und nehmen an $A < 0$. (Diese Annahme entspricht der Situation im Nilsson-Modell für positive Deformation δ). Dann ist $A' > 0$ und die Quadrupolstörung H_{int} (vgl. (2.3.4.)) senkt denjenigen Zustand mit dem kleinsten Eigenwert ϵ des $SU(3)$ -Operators Q_0 energetisch am tiefsten ab. Im gewählten Beispiel $N = 2$ ist das nach Tabelle A1 der Zustand $|2 \in K\rangle = |2, -2\sqrt{2/3}, 0\rangle$, also der Zustand mit dem größten Quadrupolmoment. Das ist auch anschaulich klar, denn nach Figur B2 hat dieser Zustand von allen die stärkste Konzentration seiner Dichte in Richtung der z -Achse. Daher hat auch dieser Zustand den größten Überlapp mit der Quadrupolstörung $H_{int} = A\gamma^2 Y_{20}$ und wird für $A < 0$ am stärksten abgesenkt. Mit anderen Worten, im Fall $A < 0$ führt H_{int} dazu, daß das Gesamtpotential - verglichen zu H_0 - in einer gewissen Umgebung der z -Achse attraktiver und in einer Umgebung der x, y -Ebene repulsiver wird, so daß ein prolata deformierter Zustand energetisch begünstigt wird.

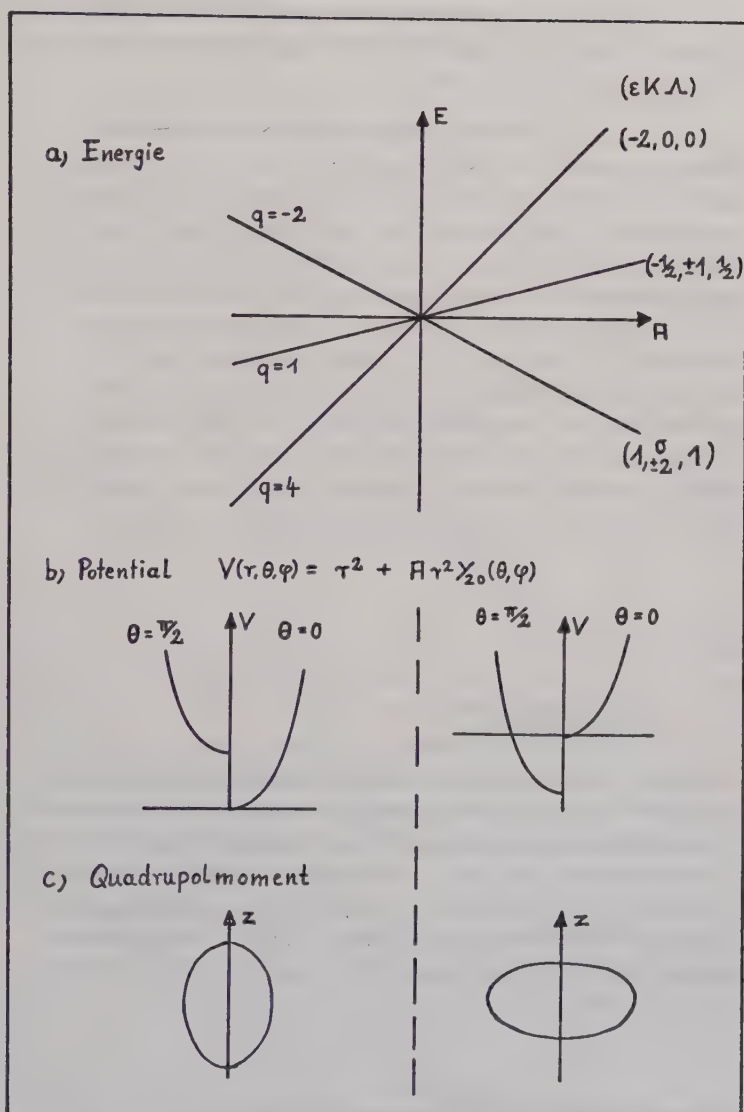


Fig. B 3:

Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge von Potentialdeformation, energetischer Aufspaltung und Quadrupolmoment (schematisch)

Aus den in Tabelle B1 angegebenen Massenquadrupolmomenten können wir daher direkt die energetische Reihenfolge der Zustände im deformierten Oszillator ablesen.

In Figur B3 sind die oben skizzierten Zusammenhänge nochmals schematisch dargestellt. Teil a der Figur zeigt, wie die Zustände $|2EK\rangle$ aus Tabelle B1 durch H_{int} proportional zu ihrem Massenquadrupolmoment q bzw. proportional zu ϵ in Abhängigkeit vom Parameter A der Quadrupoldeformation energetisch aufspalten. Teil b zeigt das deformierte Oszillatorpotential für zwei Werte von Θ und für Bereiche $A > 0$ bzw. $A < 0$. Da V rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, haben wir $\varphi = 0$ gesetzt. Außerdem wurde kein Wert auf eine maßstabsgetreue Zeichnung gelegt und daher alle konstanten Faktoren unterdrückt. Im Teil c ist jeweils die Deformation bzw. das resultierende Quadrupolmoment des energetisch tiefsten Zustandes schematisch dargestellt. Die obige Diskussion läßt sich anhand der Figur B3 nochmals anschaulich verfolgen.

ANHANG C

Zum Stark-Effekt

In Abschnitt 2.4. wurde gezeigt, daß eine gruppentheoretische Lösung des Stark-Effekts, also eine dipolartige Störung im Coulombpotential, bei Beschränkung auf Zustände zur selben Hauptquantenzahl n mit Hilfe der Gruppe $SO(4)$ möglich ist. Dabei haben wir benutzt, daß die O_4 -Algebra direkte Summe zweier O_3 -Algebren ist deren Operatoren F_z bzw. G_z zur Klassifikation der Zustände $|nfg\rangle$ verwendet werden können (vergleiche Gleichung (2.4.3.) und (2.4.4.)). Der Dipoloperator

$$d_z = e \cdot z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} e \cdot r \cdot Y_{10}(\hat{r}) \quad (C1)$$

ist nach (2.4.39.) diagonal, mit anderen Worten, $|nfg\rangle$ ist Eigenbasis zur z-Komponente des Dipoloperators.

Die Klassifikation der Basis $|nfg\rangle$ und ihre physikalische Bedeutung soll im folgenden am Beispiel $n = 3$ erläutert werden.

Aus (2.3.32.) folgt: $F = G = 1$

und daher: $f = 0, \pm 1; g = 0, \pm 1$

Aus (2.4.42.) erhalten wir:

$$\begin{aligned} d_z |nfg\rangle &= e_z |nfg\rangle = \\ &= -e \frac{3\hbar n}{2c} (g-f) |nfg\rangle; \quad (C = \frac{\mu e^2}{\hbar}) \end{aligned}$$

oder abgekürzt

$$d_z |nfg\rangle = \bar{c} (f-g) |nfg\rangle \quad (C2)$$

Die Eigenbasis von d_z (und damit $H_{int} = -\vec{E} d_z$ aus (2.4.3.)) hängt nach (2.4.15.) mit der üblichen 'Drehimpulsbasis' $|nlm\rangle$ über Clebsch-Gordan-Koeffizienten zusammen. Daher muß $f + g = m$ gelten. Obige Ausführungen sind in Tabelle C1 zusammengefaßt. Die ersten beiden Spalten enthalten die Quantenzahlen f und g . In der dritten Spalte sind die Zustände $|nfg\rangle$ als Linearkombination der $|nlm\rangle$ angegeben. Die vierte Spalte schließlich zeigt die Eigenwerte des Dipoloperators d_z in der Basis $|nfg\rangle$.

Es ist interessant, sich ähnlich wie im Anhang B, das Zustandekommen der Dipolmomente anhand der Dichten für die Zustände $|nfg\rangle$ plausibel zu machen.

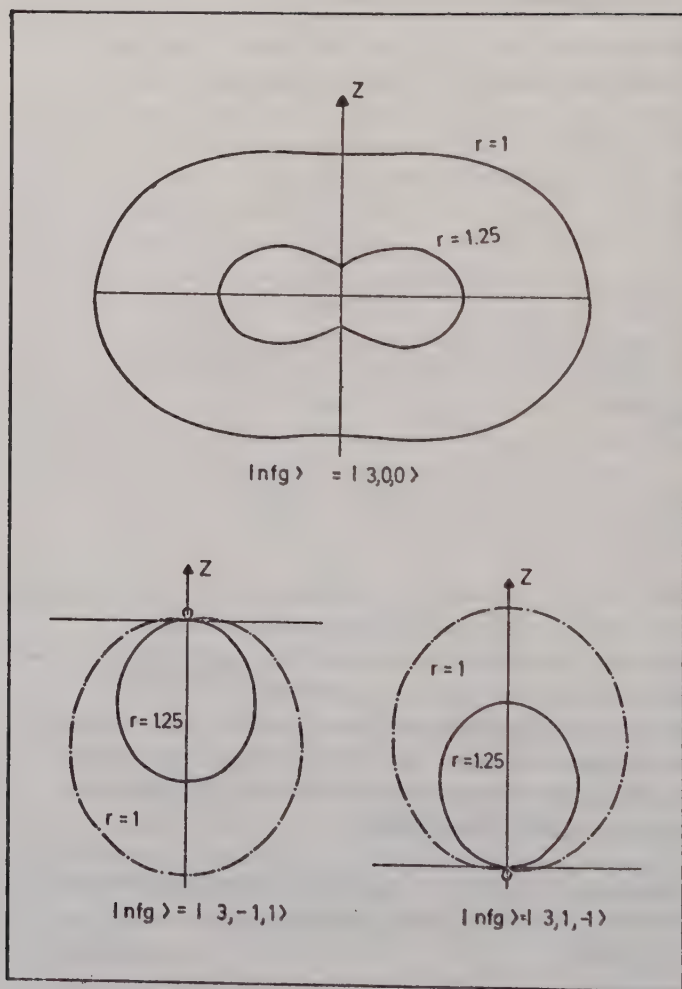


Fig. 1: Polardiagramm für die Dichte der Zustände $|nfg\rangle$ mit $f + g = 0$. Weitere Erklärungen siehe Text.

Tabelle C 1

Eigenschaften der Zustände $|nfg\rangle$ für
 $n = 3$ ($F = G = 1$)

f	g	$ 3fg\rangle = \sum_l (F_l G_l l f+g\rangle) 3l f+g\rangle$	Eigenwert von $d_z/\tilde{c}$
0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}} 300\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} 320\rangle$	0
1	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}} 300\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} 310\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} 320\rangle$	2
-1	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} 300\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} 310\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} 320\rangle$	-2
0	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}} 311\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} 321\rangle$	-1
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} 311\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} 321\rangle$	1
0	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}} 31-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} 32-1\rangle$	1
-1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}} 31-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} 32-1\rangle$	-1
1	1	$ 322\rangle$	0
-1	-1	$ 32-2\rangle$	0

Figur C1 zeigt Polardiagramme für die Dichten von Zuständen $|nfg\rangle$ mit $f + g = 0$. r ist in Einheiten des Bohr'schen Radius angegeben. Alle Figuren sind rotationssymmetrisch um die z -Achse. Wie aus Tabelle C1 klar ist, besitzt der Zustand $|300\rangle$ definierte Parität. Daher ist die Dichte $\varrho(300)$ symmetrisch bezüglich der Substitution $\underline{r} \rightarrow -\underline{r}$, d. h. $\rho \rightarrow \pi - \rho$. Folglich muß auch das Dipolmoment dieses Zustandes Null sein.

Die Dichten $\varrho(31-1)$ bzw. $\varrho(3-11)$ zeigen eine starke Konzentration in positive bzw. negative z -Richtung. Aus der Darstellung dieser Wellen-

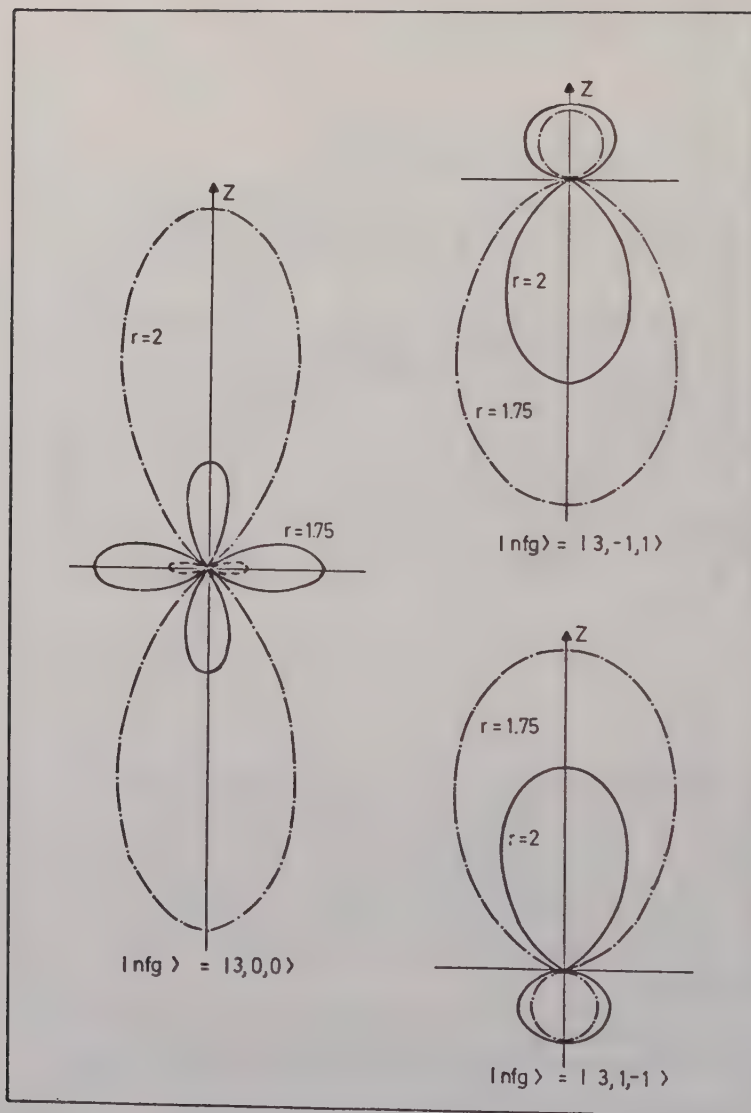
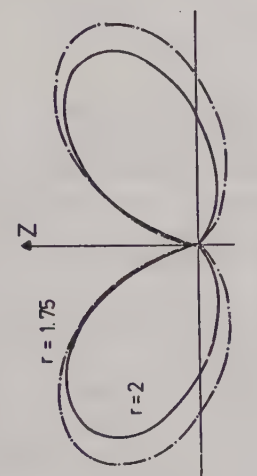
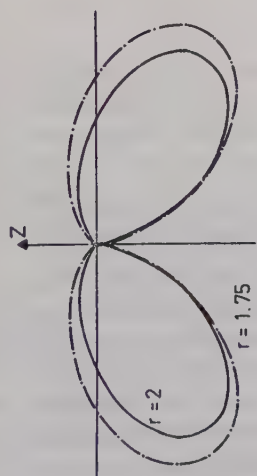


Fig. C 2:

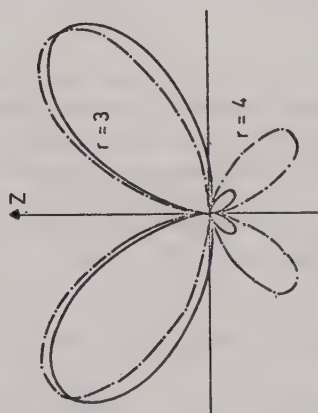
Wie Fig. C 1, jedoch für $r = 1.75$ bzw. $r = 2$.



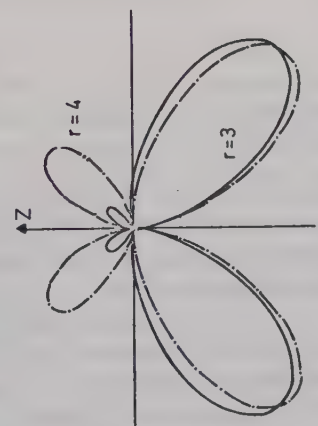
$$|nfg\rangle = |310\rangle$$



$$|nfg\rangle = |301\rangle$$



$$|nfg\rangle = |310\rangle$$



$$|nfg\rangle = |301\rangle$$

Fig. C 3:

Wie Fig. C 1, jedoch für Zustände mit $f + g = 1$.

funktionen durch Drehimpulseigenfunktionen in Tabelle C1 ist klar daß gilt:

$$\rho(3-11)(\tau) = \rho(31-1)(-\tau) \quad (C3)$$

Daher besitzen die beiden Zustände $|3, 1, -1\rangle$ bzw. $|3, -1, 1\rangle$ große und entgegengesetzt gleiche Dipolmomente. Figur C2 zeigt nochmals die Dichten dieser Zustände für andere Werte von r ; natürlich trifft dieselbe Interpretation wie oben zu.

Der Tabelle C1 entnimmt man folgende Relationen für die Dichten von Zuständen $|nfg\rangle$ mit $f + g = \pm 1$.

$$\rho(310)(\tau) = \rho(301)(-\tau)$$

$$\rho(3-10)(\tau) = \rho(301)(\tau) \quad (C4)$$

$$\rho(30-1)(\tau) = \rho(310)(\tau)$$

Aus diesen Relationen für die Dichten folgt sofort, daß die Dipolmomente der Zustände $|310\rangle$ und $|30-1\rangle$ bzw. $|301\rangle$ und $|3-10\rangle$ gleich sein müssen, jedoch etwa für $|310\rangle$ und $|301\rangle$ entgegengesetzt gleich.

Diese Tatsache kann man sich auch aus Figur C3 anschaulich klar machen; wegen der Relation (C4) sind nur die Dichten $\rho(301)$ und $\rho(310)$ gezeigt. Es ist klar, daß $\rho(301)$ in negativer z-Richtung konzentriert ist und daher zu einem negativen Dipolmoment führt; dagegen ist $\rho(310)$ in positiver z-Richtung konzentriert und $|310\rangle$ besitzt ein positives Dipolmoment. Die Polardiagramme für die Dichten der Zustände mit $f + g = 2$ (bzw. -2) sind identisch mit denen für Kugelflächenfunktionen Y_{22} (bzw. Y_{2-2}) und daher nicht gezeigt. Es ist klar, daß wegen definierter Parität dieser beiden Zustände ihr Dipolmoment Null sein muß.

Wir haben am Beispiel $n = 3$ gesehen, daß die gruppentheoretischen Quantenzahlen f und g der Zustände $|nfg\rangle$ zu gegebenem n mit Hilfe der Relationen

$$F = G = \frac{1}{2} (n-1) \text{ und } f, g = -F, -F + 1, \dots, +F \quad (C5)$$

sehr einfach angegeben werden können.

Die Dipolmomente dieser Zustände sind bis auf eine Konstante $\bar{c}$ mit $(f-g)$ identisch. Figur C1 - C3 haben gezeigt, daß $(f-g)$ unmittelbar in eine anschauliche Deformation der Dichte $\rho(nfg)$ übersetzt werden kann.

Nach Gleichung (2.4.42.) gilt mit H_{int} aus (2.4.3.)

$$H_{int} = -\bar{E} d_z \quad (C6)$$

daher

$$H_{int} |nfg\rangle = -\bar{E} \bar{c} (f-g) |nfg\rangle \quad (C7)$$

mit $\bar{c}$ aus Gleichung (C2).

Das heißt, der Stark-Effekt erzeugt Eigenzustände zur z -Komponente des Dipoloperators, und der Zustand mit dem größten Dipolmoment wird energetisch am tiefsten abgesenkt. Diese energetische Aufspaltung ist ferner proportional zum Dipolmoment.

Für das Beispiel $n = 3$ kann man aus Tabelle C1 trivialerweise die Aufspaltung der Zustände im Starkeffekt nach Gleichung (C7) ablesen, die nach Gleichung (C2) also proportional zu d_z ist.

Mit den am Beispiel $n = 3$ demonstrierten Methoden ist es offenkundig, wie man für größere Werte von n vorgeht. Wir wollen uns noch die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ genauer betrachten.

(i) $n = 4$

Aus Gleichung C5 folgt:

$$F = G = 3/2$$

und daher

$$f, g = 3/2, -1/2, 1/2, 3/2$$

Die Dipolmomente der Zustände $|4fg\rangle$ erhält man wieder aus Gleichung (C2) und die Darstellung der 'Dipoleigenzustände' durch Drehimpulszustände ist durch Gleichung (2.4.15.) gegeben:

$$|4fg\rangle = \sum_{\ell} \left(\begin{matrix} 3/2 & 3/2 & g \\ \ell & \ell & g \end{matrix} \right) |4\ell\ell+g\rangle$$

Die Klassifikation der Zustände $|4fg\rangle$ ist in Tabelle C2 zusammengestellt.

Tabelle C 2

Eigenschaften der Zustände

$|nfg\rangle$ für $n = 4$ ($F = G = 3/2$)

f	g	m	$d_{z/\bar{c}}$
$3/2$	$-3/2$	0	3
$1/2$	$-1/2$		1
$-1/2$	$1/2$		-1
$-3/2$	$3/2$		-3
$3/2$	$-1/2$	1	2
$1/2$	$1/2$		0
$-1/2$	$3/2$		-2
$1/2$	$-3/2$	-1	2
$-1/2$	$-1/2$		0
$-3/2$	$1/2$		-2

f	g	m	$d_{z/\bar{c}}$
$3/2$	$1/2$	2	1
$1/2$	$3/2$		-1
$-1/2$	$-3/2$	-2	1
$-3/2$	$-1/2$		-1
$3/2$	$3/2$	3	0
$-3/2$	$-3/2$	-3	0

Als Ergebnis halten wir fest, daß das elektrische Dipolmoment insgesamt sechs verschiedene Werte annehmen kann. Demnach spalten die 16 ursprünglich miteinander entarteten Zustände in sechs, durch ihr gemeinsames Dipolmoment gekennzeichnete, Gruppen von Zuständen auf. Die Zustände zum maximalen Wert von $|d_z|$ sind jeweils eindeutig.

(ii) $n = 5$

Mit denselben Gleichungen wie unter (i) erhält man:

$$F = G = 2; \quad f, g = -2, -1, 0, 1, 2$$

und

$$|5fg\rangle = \sum_z (2f \ 2g | \ell \ f+g \rangle | 5 \ell \ f+g \rangle$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle C 3 zusammengestellt.

Tabelle C 3

Eigenschaften der Zustände

$|nfg\rangle$ für $n = 5$ ($F = G = 2$)

f	g	m	$d_z/\bar{c}$
2	-2	0	-4
1	-1		2
0	0		0
-1	1		-2
-2	2		-4
2	-1	1	3
1	0		1
0	1		-1
-1	2		-3
1	-2	-1	3
0	-1		1
-1	0		-1
-2	1		-3
2	0	2	2
1	1		0
0	2		-2

f	g	m	$d_z/\bar{c}$
0	-2	-2	2
-1	-1		0
-2	0		-2
2	1	3	1
1	2		-1
-1	-2	-3	1
-2	-1		-1
2	2	4	0
-2	-2	-4	0

Hier spalten die $n^2 = 25$ Zustände in neun Gruppen auf, wobei die Zustände innerhalb einer Gruppe dasselbe Dipolmoment besitzen. Wie in den vorhergegangenen Beispielen ist die Aufspaltung nach (C7) proportional zum Dipolmoment. Zustände zum maximalen Wert von $|d_z|$ sind wieder eindeutig.

Wir sehen jedoch, daß auch unter H_{int} eine gewisse Entartung verbleibt. Der maximale Entartungsgrad wird in unseren Beispielen für Zustände mit $d_z = 0$ erreicht und ist jeweils gleich n .

Diese restliche Entartung ist eine Folge davon, daß die Dipolstörung H_{int} aufgrund ihrer Symmetrie Zustände mit gleichem Dipolmoment nicht unterscheiden kann, auch wenn sich diese in einer weiteren Quantenzahl unterscheiden. Zum Beispiel bleiben die Zustände $|5, 1, -1\rangle$ und $|5, 2, 0\rangle$ entartet, da beide $d_z = 2$ besitzen, obwohl sie sich im Eigenwert m von L_z unterscheiden (siehe Tabelle C3). Diese noch vorhandene Entartung kann durch ein äußeres magnetisches Feld (Zeeman-Effekt) weiter aufgehoben werden. Da $L_z = F_z + G_z$ nach Gleichung (2.4.26.), ist für ein magnetisches Feld in z-Richtung auch der Zeeman-Effekt in der Basis $|nfg\rangle$ diagonal (vergleiche dazu auch die Zusammenfassung dieses Kapitels).

Abschließend noch etwas allgemeinere Bemerkungen. In Abschnitt 2.3. haben wir gesehen, daß eine quadrupolartige Störung im harmonischen Oszillator als Einteilchenproblem mit Hilfe der $SU(3)$ lösbar ist. Diese Beobachtung führt unmittelbar dazu, daß eine QQ-Wechselwirkung zwischen n -Teilchen in einer Oszillatorschale mit Hilfe derselben Gruppe diagonalisiert werden kann (siehe Kapitel 3).

Diese Tatsache besitzt auch hier ein Analogon. Das Problem einer dipolartigen Störung (vergleiche (C1)) im Coulomb-Potential kann gruppentheoretisch mit der Gruppe $SO(4)$ gelöst werden, wie in Abschnitt 2.4. ausführlich diskutiert wurde.

Diese Lösung des Einteilchenproblems führt dazu, daß eine Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen r -Teilchen in einem gemeinsamen

Coulomb-artigen Potential und Zuständen zur selben Hauptquantenzahl n mit Hilfe der selben Gruppe $SO(4)$ diagonalisiert werden kann. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, soll noch die Gestalt dieser Dipol-Dipol-Wechselwirkung angegeben werden:

$$V_{DD} = \text{const.} \cdot [\mathcal{D} \times \mathcal{D}]^0$$

$$= \text{const.} \sum_m (-1)^m \left\{ \sum_{i=1}^N r_i Y_{1m}(\hat{r}_i) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^N r_j Y_{1-m}(\hat{r}_j) \right\}$$

Da V_{DD} Einteilchenzustände verschiedener Parität verknüpft, kann V_{DD} für das nukleare Vielteilchenproblem keine Rolle spielen. Denn dort wird das Einteilchenpotential offenbar gut durch einen harmonischen Oszillator angenähert und alle Zustände innerhalb einer 'Schale' besitzen folglich dieselbe Parität. Dagegen dürfte dieses Problem in der Atomhülle von allgemeinerem Interesse sein.

ANHANG D

SU(3)-Rechnungen in $^{17}_0$ und $^{18}_0$

D 1. Vorbemerkungen

Als Modellannahmen seien im folgenden stets vorausgesetzt, daß wir n -Teilchen in der (sd)-Schale in einem harmonischen Oszillatorpotential H_0 betrachten, die durch H_{int} aus (3.4.9.) miteinander wechselwirken. Die Zustände dieses Vielteilchensystems sind dann reine SU(3)-Zustände der Gruppenkette (3.4.7.) und besitzen die in (3.4.10.) angegebenen Energien. Zur Berechnung des SU(3)-Spektrums von $^{18}_0$ wurden wie in Kapitel 4. (Anhang F) die Parameter $A = -0.283$ MeV

und $B = 0.649$ MeV verwendet.

In Gleichung (2.3.6.) hatten wir den $SU(3)$ -Operator Q_m bis auf Faktor mit den sphärischen Komponenten des Quadrupoloperators $\bar{Q}^2$ identifiziert. Da Q_m keine Matrixelemente zwischen Zuständen zu verschiedenen $SU(3)$ -Darstellungen besitzen kann, folgen bei einer Beschreibung von sd-Schalenkernen im $SU(3)$ -Modell sofort Auswahlregeln für die möglichen E2-Übergänge. Ein weiterer Vorteil ist, daß in bestimmten Zuständen für die Matrixelemente von Q_m auf gruppentheoretischem Wege eine algebraische Formel angegeben werden kann. Diese wurde zuerst von Elliott (Ref. 34) abgeleitet, ist jedoch nur in Spezialfällen einfach anwendbar. Für Ein- und Zweiteilchenzustände lassen sich die Matrixelemente von Q_m jedoch für alle Zustände exakt mit den in Abschnitt (2.3.) und (3.4.) angegebenen Formeln berechnen. Im folgenden soll letztere Methode beschrieben werden und dann zur Berechnung experimenteller Daten von ^{17}O und ^{18}O verwendet werden. Die Ableitung der Elliott'schen Formel, die in Kapitel 4 (Anhang F) zur Berechnung der $B(E2)$ -Werte und Quadrupolmomente verwendet wurde, wird in Punkt D4 kurz skizziert.

D 2. Berechnung der Matrixelemente des Quadrupoloperators in Ein- und Zweiteilchen $SU(3)$ -Zuständen

Aus Gleichung (A6) folgt:

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (a_1^+ a^1 + a_{-1}^+ a^{-1} - 2 a_0^+ a^0) \quad (D1)$$

Bezeichne $|\bar{0}\rangle$ den Grundzustand des Oszillatorpotentials H_0 , dann läßt sich der ν -te angeregte Zustand schreiben als

$$|\nu \ell m\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}(\nu-\ell)} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{(\nu+\ell+1)!! (\nu-\ell)!!}} (a^+ a^+)^{\frac{1}{2}(\nu-\ell)} y_{\ell m}(a^+) |\bar{0}\rangle \quad (D2)$$

wobei $(a^+ \cdot a^+)$ das Skalarprodukt in sphärischen Komponenten bezeichnet und $y_{\ell m}(\underline{r}) = r^\ell Y_{\ell m}(\hat{r})$. Aufgrund der Kommutatorrelationen (A3) läßt sich a^q , angewandt auf ein Polynom in a_q^+ , interpretieren als:

$$a^q = \partial / \partial a_q^+ \quad (D3)$$

Mit (D1), (D2) und (D3) läßt sich $Q_0 |v \ell m\rangle$ leicht berechnen. Für $v = 2$ und $l = 0, 2$ erhält man folgende Relationen

$$\begin{aligned} Q_0 |200\rangle &= 2/\sqrt{3} |220\rangle \\ Q_0 |220\rangle &= \sqrt{2/3} (\sqrt{2} |200\rangle - |220\rangle) \\ Q_0 |22\pm 1\rangle &= -1/\sqrt{6} |22\pm 1\rangle \\ Q_0 |22\pm 2\rangle &= \sqrt{2/3} |22\pm 2\rangle \end{aligned} \quad (D4)$$

(Außerdem sei noch angeführt:

$$Q_2 |200\rangle = \sqrt{2/3} |222\rangle \quad (D4a)$$

Da die Einteilchenfunktionen $|2lm\rangle$ zur irreduziblen Darstellung (20) der $SU(3)$ gehören, sind im Zweiteilchenfall nur die im Kroneckerprodukt $(20) \times (20)$ enthaltenen $SU(3)$ -Darstellungen möglich.

$$(20) \times (20) = (40) + (02) + (21) \quad (D5)$$

Man beachte, daß wir hier nur die Klassifikation des Ortsanteils der Zweiteilchenfunktionen gemäß der Kette (3.4.7.) betrachten. Dabei gehören (40) und (02) zur Ortssymmetrie $\{2\}$ und (21) zu $\{11\}$. Durch Entwicklung der Zweiteilchenfunktionen $|(\lambda\mu)LM\rangle$ nach Einteilchenfunktionen $|2lm\rangle$ gemäß Tabelle 1, Anhang E, kann man mit (D4) den Zustand $Q_0 |(\lambda\mu)LM\rangle$ berechnen. Im Zweiteilchensystem ist Q_0 natürlich die Summe der Einteilchenoperatoren

$Q_0(i)$ (vergleiche (A22)).

$$Q_0 = \sum_{i=1}^2 Q_0(i) \quad (D6)$$

Es genügt für spätere Zwecke, die Funktionen $Q_0(\lambda\mu)L M=0\rangle$ zu kennen, und man erhält mit (D4) und (D6):

$$Q_0|(40)L=0 M=0\rangle = 2\sqrt{\frac{14}{15}}|(40)L=2 M=0\rangle$$

$$Q_0|(40)L=2 M=0\rangle = 2\sqrt{\frac{14}{15}}|(40)L=0 M=0\rangle - \\ - \frac{11}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}|(40)L=2 M=0\rangle + \frac{12}{7}\sqrt{\frac{3}{5}}|(40)L=4 M=0\rangle$$

$$Q_0|(40)L=4 M=0\rangle = \frac{12}{7}\sqrt{\frac{3}{5}}|(40)L=2 M=0\rangle - \\ - \frac{10}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}|(40)L=4 M=0\rangle$$

$$Q_0|(02)L=0 M=0\rangle = -2\sqrt{\frac{1}{3}}|(02)L=2 M=0\rangle$$

$$Q_0|(02)L=2 M=0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|(02)L=2 M=0\rangle - \\ - 2\sqrt{\frac{1}{3}}|(02)L=0 M=0\rangle \quad (D7)$$

$$Q_0|(21)L=1 M=0\rangle = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}|(21)L=1 M=0\rangle - \\ - \frac{6}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}|(21)L=3 M=0\rangle$$

$$Q_0|(21)L=2 M=0\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}|(21)L=2 M=0\rangle$$

$$Q_0|(21)L=3 M=0\rangle = -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}|(21)L=3 M=0\rangle - \\ - \frac{6}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}|(21)L=1 M=0\rangle$$

Die Gleichungen (D7) lassen sich zusammenfassend schreiben als:

$$Q_0 |(\lambda\mu) L M = \sigma\rangle = \sum_{L'} C((\lambda\mu) L L') |(\lambda\mu) L' M = \sigma\rangle \quad (D8)$$

und daher sind die Matrixelemente von Q_0 gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle (\lambda'\mu') L' M' = \sigma | Q_0 | (\lambda\mu) L M = \sigma \rangle &= \\ &= C((\lambda\mu) L L') \delta_{(\lambda\mu)(\lambda'\mu')} \end{aligned} \quad (D9)$$

Das Quadrupolmoment $QM(J)$ eines Zustandes mit dem Drehimpuls J ist definiert als (Ref. 35):

$$QM(J) = \sqrt{\frac{16\pi}{15}} \langle J J_z = J \uparrow T_z | \bar{Q}_0^2 | J J_z = J \uparrow T_z \rangle \quad (D10)$$

und der $B(E2)$ -Wert eines $E2$ -Überganges vom Anfangszustand (J_i, T_i) in den Endzustand (J_f, T_f) als:

$$B(E2; i \rightarrow f) = \frac{1}{2J_i + 1} |\langle J_f T_f T_{zf} || \bar{Q}^2 || J_i T_i T_{zi} \rangle|^2 \quad (D11)$$

wobei das Matrixelement in (D11) nicht bezüglich des Isospins reduziert ist.

Der effektive Quadrupoloperator $\bar{Q}^2$ ist definiert als (Ref. 35):

$$\bar{Q}^2 = \frac{1}{2}(e_p + e_n) \sum_k r_k^2 Y_2(k) + \frac{1}{2}(e_p - e_n) \sum_k \tau_z(k) r_k^2 Y_2(k) \quad (D12)$$

(e_p und e_n bezeichnen effektive Ladungen in Einheiten der Elementarladung e).

Zwischen $T = 0$ -Zuständen liefert der isovektorielle Anteil von $\bar{Q}^2$ in (D12) keinen Beitrag zum Matrixelement von $\bar{Q}^2$, d. h. $\bar{Q}^2$ reduziert sich auf

$$\bar{Q}^2 = \frac{1}{2}(e_p + e_n) \sum_k r_k^2 Y_2(k) = e \sum_k r_k^2 Y_2(k) \quad (D12a)$$

wobei in der letzten Identität die üblichen Werte von $e_p = 1.5 e$ und $e_n = 0.5 e$ verwendet wurden (Ref. 35, 36, 3).

Für die Ein- und Zweineutronenzustände von $^{17}_0$ bzw. $^{18}_0$ reduziert sich (D12) auf:

$$\bar{Q}^2 = e_n \sum_k r_k^2 Y_2(k) \quad (D12b)$$

Das heißt, in diesen Fällen ist auch der effektive Quadrupoloperator $\bar{Q}^2_0$ proportional zum SU(3)-Operator Q_0 , der nach (2.3.6.) gegeben ist durch

$$Q_0 = -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \sum_k (r_{kb})^2 Y_{20}(\hat{r}_k) \quad (D13)$$

Daher gilt

$$\bar{Q}^2_0 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e_n b^2 Q_0 \quad (D14)$$

Man beachte, daß in (D13) die Konvention $\hbar = m = \omega = 1$ nicht verwendet wurde und daher der Oszillatorparameter $b = \sqrt{\hbar/m\omega}$ auftritt.

Da auch (D11) mittels Wigner-Eckart-Theorem auf die Berechnung des Matrixelements von $\bar{Q}^2_0$ zurückgeführt werden kann, reduziert sich die Berechnung von Quadrupolmomenten und B(E2)-Werten mit dem Operator (D12b) wegen (D14) auf die Berechnung der Matrixelemente von Q_0 , die jedoch mit (D9) und (D4) bzw. (D7) trivial ist.

D 3. Anwendung der SU(3)-Klassifikation auf $^{17}_0$ und $^{18}_0$

a) Der Kern $^{17}_0$

Obwohl die Werte der effektiven Neutronenladung e_n , entommen aus $^{17}_0$ -Daten, in zahlreichen Literaturstellen zu finden sind, wollen wir zunächst an diesem Beispiel die einfache Anwendung der unter D2 angegebenen Gleichungen demonstrieren.

Das Quadrupolmoment des $^{5/2+}$ -Grundzustandes von $^{17}_0$ ist nach (D10)

$$QM(5/2^+) = \sqrt{\frac{16\pi}{15}} \langle 5/2 \ 5/2 \ T_2 = -1/2 | \bar{Q}_0^2 | 5/2 \ 5/2 \ T_2 = -1/2 \rangle$$

Mit Hilfe von (D14) und (D4) erhält man

$$QM(5/2^+) = -2e_n b^2 [efm^2]$$

Mit dem experimentellen Wert von $QM(5/2^+) = -2.7 \pm 0.3 \text{ efm}^2$ und $b^2 = \hbar/m\omega$, $\hbar\omega = 41 \cdot A^{-1/3} \text{ [MeV]}$ folgt

$$b^2 = 1.03 \text{ A}^{-1/3} \text{ fm}^2$$

und

$$e_n = 0.525 e$$

Analog kann den B(E2)-Wert für den Übergang vom ersten angeregten $^{1/2+}$ -Zustand in den $^{5/2+}$ -Grundzustand berechnen.

Mit (D11), (D14) und dem W.E.-Theorem folgt:

$$\begin{aligned} B(E2; 1/2 \rightarrow 5/2) &= 3e_n^2 b^4 \frac{15}{8\pi} |\langle 222 | Q_2 | 200 \rangle|^2 \\ &= e_n^2 b^4 \frac{15}{2\pi} = 4.615 e^2 \text{fm}^4 \end{aligned}$$

wobei (D4a) und obige Werte von e_n und b^2 verwendet wurden.

Im Vergleich dazu ist der experimentelle Wert

$$B(E2; 1/2 \rightarrow 5/2)_{\text{exp.}} = 6.2 \pm 0.1 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$$

Um diesen Wert zu erreichen, wäre jedoch $e_n = 0.611e$ nötig. Die Tatsache, daß beide Daten $QM(5_2^+)$ bzw. $B(E2; 1/2 \rightarrow 5/2)$ nicht mit einem Wert von e_n erklärt werden können, kann auf verschiedene Ursachen zurückgeführt werden:

- (i) Zustandsabhängigkeit der effektiven Ladung (Ref. 3, 36)
- (ii) Wahl des harmonischen Oszillators als Einteilchenpotential.

b) Der Kern $^{18}_0$

Das SU(3)-Spektrum von $^{18}_0$ ist bereits in Figur 3.4.1. dargestellt. Obwohl die energetische Lage der Zustände quantitativ nicht befriedigend erklärt werden kann, ist es interessant, als weiteren Test für die Annahme reiner SU(3)-Wellenfunktionen Quadrupolmomente und $B(E2)$ -Werte zu berechnen.

Die Berechnung der Quadrupolmomente ist mit (D10), (D14), (D9) und (D7) leicht möglich. Für die ersten angeregten Zustände ergibt sich: (zur Rechnung wurden die Werte für e_n und b^2 verwendet, wie sie in a) angegeben wurden)

$$QM(2_1^+) = -4.45 \text{ e fm}^2, \quad QM(4_1^+) = -5.51 \text{ e fm}^2$$

$$QM(2_2^+) = +2.83 \text{ e fm}^2$$

Der experimentelle Wert von $QM(2_1^+)$ ist nach neuesten Messungen (Ref. 37):

$$QM(2_1^+) = -19 \pm 2 \quad \text{bzw.} \quad -16 \pm 2 \text{ e fm}^2$$

Obwohl das Quadrupolmoment im SU(3)-Limit das richtige Vorzeichen besitzt, wird es stark unterschätzt. Es ist interessant, daß man selbst durch eine beliebige Mischung von Zweiteilchenzuständen

Tabelle D 1

B(E2)-Werte für ^{18}O Zustände

J_i	E_i	J_f	E_f	SU(3) Modell	Experiment
2^+	1.98	0^+	0	4.48	8.15 ± 0.41 9.0 ± 2 6.5 ± 1.2
4^+	3.55	2^+	1.98	4.11	≤ 12.22 ~ 7.11
0^+	3.63	2^+	1.98	0	30 ± 10 27.37 ± 4.06
2^+	3.92	0^+	0	0	0.99 ± 0.59 < 0.74
2^+	3.92	0^+	3.63	1.6	
2^+	3.92	2^+	1.98	0	11.73 ± 11.28

$(\chi\mu)LSJ\rangle$ nicht in der Lage ist, einen derart großen Wert von $QM(2_1^+)$ zu erzeugen (Ref. 38). Das heißt, selbst im ersten angeregten Zustand von ^{18}O muß man erwarten, daß Anregungen oder stabile Deformationen des als inert und kugelsymmetrisch angenommenen ^{16}O -Rumpfes eine Rolle spielen.

In diesem Zusammenhang ist auch die $SU(3)$ -Auswahlregel für $E2$ -Übergänge interessant. Die $B(E2)$ -Werte des $SU(3)$ -Modells können mit Hilfe von (D11), (D14), (D8) und (D7) wieder einfach berechnet werden. Sie sind zusammen mit experimentellen Werten (Ref. 39, 40, 41) in Tabelle D1 zusammengefaßt.

Man erkennt, daß ein reines $SU(3)$ -Modell sicherlich nicht in der Lage ist, die Struktur von ^{18}O zu beschreiben. Während der $B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_1^+)$ in Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage schwach ist, steht der große $B(E2)$ -Wert für den $0_2^+ \rightarrow 2_1^+$ Übergang im krassen Widerspruch zur $SU(3)$ -Vorhersage.

Diese Tatsache ist aber andererseits auch wieder nicht Überraschend, denn wir sahen bereits bei der Diskussion des Quadrupolmoments $QM(2_1^+)$, daß Komponenten außerhalb des $2p$ -Modellraumes im 2_1^+ -Zustand wahrscheinlich sind. Außerdem weiß man, daß entweder der 0_2^+ - oder 0_3^+ -Zustand von ^{18}O ein Interuder-Zustand ist, d. h. von Komponenten außerhalb des $2p$ -Raumes dominiert wird. Neuere Rechnungen (Ref. 39, 41, 42) identifizieren den 0_2^+ -Zustand mit einer dominanten $4p2h$ Struktur, was sich durch die starke Brechung der $SU(3)$ -Auswahlregel zu bestätigen scheint.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die Eigenschaften von ^{18}O im reinen $SU(3)$ -Modell nicht beschrieben werden können. Vermutlich spielen jedoch in ^{18}O Anregungen des ^{16}O -Rumpfes eine so wichtige Rolle, daß eine Beschreibung dieses Kernes im 2-Teilchenmodell nicht adäquat ist und weitere Freiheitsgrade des 18-Nukleonensystems zur Erklärung herangezogen werden müssen.

D 4. B(E2)-Werte und Quadrupolmomente im SU(3)-Modell

Die bisher benutzte Methode zur Berechnung von Quadrupolmomenten und B(E2)-Werten, basierend auf Gleichung (D4) und (D7), würde für mehr als zwei Teilchen den Rechenaufwand gewaltig vergrößern. Eine elegante, jedoch nur in Spezialfällen einfach anwendbare Formel wurde von Elliott (Ref. 34) angegeben, die in Kapitel 4 (Anhang E) verwendet wurde.

Die Gruppenoperatoren Q_m aus (A6) hängen mit den von Elliott benutzten auf einfache Weise zusammen:

$$Q_m^E = -\sqrt{6} Q_m \quad (D15)$$

Aus (D12) und (D13) folgt für T = 0 Kerne:

$$\bar{Q}_m^2 = \frac{1}{2} (e_p + e_n) b^2 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_m^E \quad (D16)$$

In Abschnitt 2.3. hatten wir die Einteilchenzustände des H. O. durch zwei verschiedene Gruppenketten klassifiziert. Zu $SU(3) \supset SO(3)$ gehörten die Zustände $|N0\rangle \ell m$ zu $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ die $|(N\sigma) \ell K\rangle$. Dasselbe gilt auch für Vielteilchenzustände (vergleiche Anhang A), d. h. wir haben zwei Basen

$$(i) \quad |(\lambda\mu) L M \alpha\rangle \quad (SU(3) \supset SO(3))$$

und

$$(ii) \quad |(\lambda\mu) \ell \mathcal{L} K\rangle \quad (SU(3) \supset SU(2) \times U(1))$$

α ist ein beliebiger Parameter, der Zustände mit gleichen Quantenzahlen in der Basis (i) zusätzlich unterscheidet. $\mathcal{L}$ ist der Eigenwert des Casimiroperators der SU(2) Untergruppe (siehe auch Anhang A) und ermöglicht eine eindeutige Klassifikation der Zustände in der Basis (ii). Wie in Abschnitt 2.3. ist Q_0 diagonal in der Basis

(ii), wobei Q_0 hier natürlich die Summe der Einteilchenoperatoren $Q_0(i)$ bezeichnet. Diese Basis $|\lambda\mu\rangle \in \mathcal{L}K\rangle$ ist daher geeignet zur Berechnung von Quadrupolmomenten und $B(E2)$ -Werten. Die unitäre Transformation, die beide Basen ineinander überführt, lautet

$$|\{f\}, (\lambda\mu), \epsilon, L, K\rangle = \sum_{\alpha} c(\lambda\mu, \epsilon, L, K, \alpha, L) \cdot |\{f\}, (\lambda\mu), L, K, \alpha\rangle \quad (D17)$$

Durch Transformation auf ein um Ω gedrehtes Koordinatensystem erhält man:

$$|\{f\}, (\lambda\mu), K, L, M\rangle = \frac{2L+1}{c(\lambda\mu, K, L)} \cdot \int |\{f\}, (\lambda\mu), K\rangle \mathcal{D}_{MK}^L(\Omega) d\Omega \quad (D18)$$

In (D18) und im folgenden sind $\epsilon = 2\lambda + \mu$, $L = \frac{1}{2}\mu$ und werden daher nicht explizit angegeben. K ersetzt den in (D17) noch beliebigen Parameter α und ist gegeben durch

$$K = \min(\lambda\mu), \min(\lambda\mu)-2, \dots, 1 \text{ oder } 0$$

Mit Hilfe von (D18) konnte Elliott eine Formel für das Matrixelement von Q_0^E angeben, von der nur einige Spezialfälle notiert werden.

$$\alpha) \quad \mu = 0 \quad \text{d.h.} \quad K = 0$$

$$\begin{aligned} & \langle \{f\}, (\lambda 0), K=0, L' \parallel Q^E \parallel \{f\}, (\lambda 0), K=0, L \rangle \\ &= \frac{(2L+1) c((\lambda 0), \epsilon, L, K=0, L')}{\sqrt{2L'+1} c((\lambda 0), \epsilon, L, K=0, L)} (L 0 2 0 | L' 0) \cdot \\ & \cdot \{ 2\lambda + 3 + \frac{1}{2} L' (L'+1) - \frac{1}{2} L (L+1) \} \end{aligned} \quad (D19)$$

und für das Diagonalmatrixelement:

$$\begin{aligned} & \langle \{f\}, (\lambda 0), K=0, L, M=L | Q_0^E | \{f\}, (\lambda 0), K=0, L, M=L \rangle \\ & = - \frac{L}{2L+3} (2\lambda + 3) \end{aligned} \quad (D20)$$

(D18) und D(19) gelten exakt.

B) für den Fall $\lambda \gg L$ gilt approximativ

$$\begin{aligned} & \langle \{f\}, (\lambda \mu), K, L, L | Q_0^E | \{f\}, (\lambda \mu), K, L, L \rangle \\ & = 2\lambda \frac{3K^2 - L(L+1)}{(2L+3)(L+1)} \end{aligned} \quad (D21)$$

und

$$\begin{aligned} & \langle \{f\}, (\lambda \mu), K, L' || Q^E || \{f\}, (\lambda \mu), K, L \rangle \\ & = \frac{(2L+1) \cdot C((\lambda \mu), K, L')}{\sqrt{2L'+1} \cdot C((\lambda \mu), K, L)} (L K 2 0 | L' K) \cdot 2\lambda \end{aligned} \quad (D22)$$

ANHANG E

Zentrale und nichtzentrale Komponenten der effektiven (sd)-Schalen Wechselwirkung

Anmerkung

Dieser Teil der Arbeit ist - in Hinblick auf eine spätere Veröffentlichung - in sich abgeschlossen formuliert; dementsprechend enthält dieser Anhang ein eigenes Literaturverzeichnis sowie eigene Numerierung der Gleichungen, Figuren und Tabellen. Aus dem gleichen Grunde wurden die folgenden Ausführungen in Englisch formuliert.

Abstract

The contributions of central as well as noncentral two-body interactions to the matrixelements of various effective interactions for the sd-shell are studied in a $SU(3)$ -two-particle basis. The results show, that their central parts agree rather well and exhibit an approximate $SU(3)$ symmetry. However large differences are found between the noncentral parts of microscopic and phenomenological interactions respectively showing, that the tensor, LS- and ALS components of the effective interaction are determined rather insufficiently. The influence of noncentral components of the ASDI matrixelements on experimental data is investigated for the case of ^{28}Si , with the result, that the LS component is very important, to reproduce the correct ground state binding energy. Although some effects of noncentral interactions can be simulated by purely central interactions the noncentral components turn out to be essential for the final agreement with the experimental spectrum.

1. Introduction

Many successful nuclear structure calculations have been performed using central interactions only. It turns out, that fairly good agreement with experimental excitation energies and other observables, such as transition probabilities and spectroscopic factors, can be obtained. It has been suggested however by several authors¹⁻⁴⁾ that the inclusion of non-central interactions may improve the results. In fact all the microscopically calculated effective interactions include noncentral as well as central interactions by construction. For specific examples we refer to the matrixelements calculated by Kuo-Brown^{5,6)}, Goode⁷⁾ and Barrett and Kirson⁸⁾. The influence of non-central components of the BHM matrixelements on experimental data was demonstrated by Kirson⁹⁾ for some examples in the ^{16}O - and ^{40}Ca region. Moreover, Feldmeier and Manakos⁴⁾ found out, that a modification of the non-central parts of the Kuo-Brown matrixelements leads to a considerable improvement of the spectrum of ^{24}Mg . Starting from pure central MSDI matrixelements a new set of empirical matrixelements, in the following referred to as ASDI matrixelements, has recently been obtained by Glaudemans et al^{10,11)}, fitting the energy levels of nuclei in the mass-region $A = 24 - 28$. These ASDI-matrixelements give improved results for both, energies and wavefunctions. Moreover the spectroscopic factors are brought closer to their experimental values throughout the above mentioned mass region. This result immediately suggests, that the improvement over the MSDI results, is due to non-

central components of the ASDI interaction, produced in the fit procedure. On account of the above mentioned facts it seems to be worthwhile to pay attention to non-central interactions and to compare various effective interactions from this point of view.

In section 2.1 we give a brief description of the method, used to obtain the central and non-central components from a given set of 63 matricelements for the sd-space. A $SU(3)$ -basis is used to describe the two-particle states in the sd-configuration space. A comparison between the ASDI-matricelements and various other sd-shell interactions, commonly used, is presented in section 2.2 on the basis of the tensoranalysis of section 2.1. It is interesting to investigate the similarities and differences between the empirical ASDI and microscopic interactions, because the former also contains implicitly effects of both, the central and non-central forces. The third section is devoted to a detailed investigation of the contributions of non-central interactions to the total ASDI matricelements in the usual jj -coupled two-particle basis. The influence of the non-central components, contained in the ASDI set, on experimental data is discussed in section 4. As an example we chose the nucleus ^{28}Si , which can nicely be described by the ASDI set. Details of the two-particle interaction (such as non-central components) to which smaller spaces are rather insensitive, are expected to be seen clearly in this case of a large shell model space.

2. Analysis of two-particle matrixelements

2.1 Description of the method used

It is well known, that for a given modelspace the physical information on the force is contained in a finite number of two-particle matrixelements. Therefore a decomposition of those matrixelements into contributions from interactions of different tensorcharacter is a useful tool to study the properties of effective interactions.

Let us first give a brief description of the method⁴⁾ used to obtain the various tensorparts from a given set of two-particle matrixelements in sd configurationspace. The technique is similar to that, described by Kirson⁹⁾. In the present paper however, we shall use a SU(3)-basis rather than a jj-basis to represent all the central and non-central components of the interaction. The six operators $S_{\nu}^{(k)}$, defined below, form a complete basis of linear operators in the two-particle spin-space:

$$\begin{aligned} S_1^{(0)} &= 1, \quad S_2^{(0)} = [\sigma_1 \times \sigma_2]^0, \quad S_3^{(1)} = \sigma_1 + \sigma_2 \\ S_4^{(2)} &= [\sigma_1 \times \sigma_2]^2, \quad S_5^{(1)} = [\sigma_1 \times \sigma_2]^1, \quad S_6^{(1)} = \sigma_1 - \sigma_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Here the upper indices of the S-operators, viewed as Racah-tensors, indicate their rank, the lower indices give a convenient ordering; the square bracket denotes the coupling

of two tensors. Therefore we can express the most general two-particle interaction $V(1,2)$ by combining the $S_{\nu}^{(k)}$ with operators $X_{\nu}^{(k)}$ in configuration space of the same rank k and by coupling them to zero rank:

$$V(1,2) = \sum_{\nu=1}^6 [X_{\nu}^{(k)} \times S_{\nu}^{(k)}]^0 \quad (2)$$

In principle it is possible to assume different operators $X_{\nu}^{(k)}$ for the $T = 0$ and $T = 1$ channel. But since our considerations in this section do not depend on this possibility, we ignore it for the sake of a simpler notation. Several bases for the two-particle states in sd configuration space may be used, to calculate the matrix elements of $V(1,2)$. One possibility is to represent the matrix elements in the basis $|\{f\}, s^n d^{2-n}, L, S, J, T\rangle$; i. e. by a classification of the orbital part of the two-particle wavefunction according to the group chain $SU(6) \rightarrow SU(5) \div SU(1) \rightarrow SO(3)$. Here $\{f\}$ labels the representations of the $SU(6)$ group (or equivalently the orbital symmetry) and n denotes the number of particles in s orbits. Another possibility is to use the well known chain $SU(6) \rightarrow SU(3) \rightarrow SO(3)$, where the representations of the $SU(3)$ group are labeled by $(\lambda, \mu)^{12}$. The unitary transformation, connecting the two bases $|\{f\}, (\lambda, \mu), L, S, J, T\rangle$ and $|\{f\}, s^n d^{2-n}, L, S, J, T\rangle$ is given in table 1, which is taken from ref. 4. If not stated otherwise, this $SU(3)$ basis is used throughout this section. If the matrix elements of $V(1,2)$ are given in the basis $|(j_1 j_2) J, T\rangle$ an additional transformation to the $SU(3)$ basis is made, using the basis $|\{f\}, s^n d^{2-n}, L, S, J, T\rangle$ as an intermediate step.

Table 1: Transformation from the two-particle basis

$|\{f\}, s_d^{n_d 2-n}, L, S, T\rangle$ to the $SU(3)$ basis $|\{f\}, (\lambda\mu), L, S, T\rangle$. The spin- and isospin-part of the wavefunctions are the same in both bases.

N	$\{f\}$	(λ, μ)	L	S	T	Orbital part
1	$\{2\}$	$(4, 0)$	0	0	1	$\sqrt{5/9} [ss]^0 + 2/3 [dd]^0$
2	$\{2\}$	$(4, 0)$	2	0	1	$\sqrt{7/18} ([sd]^2 + [ds]^2) + \sqrt{2/9} [dd]^2$
3	$\{2\}$	$(4, 0)$	4	0	1	$[dd]^4$
4	$\{2\}$	$(0, 2)$	0	0	1	$\sqrt{5/9} [dd]^0 - 2/3 [ss]^0$
5	$\{2\}$	$(0, 2)$	2	0	1	$1/3([sd]^2 + [ds]^2) - \sqrt{7/9} [dd]^2$
6	$\{11\}$	$(2, 1)$	1	0	0	$-[dd]^1$
7	$\{11\}$	$(2, 1)$	2	0	0	$\sqrt{1/2} ([sd]^2 - [ds]^2)$
8	$\{11\}$	$(2, 1)$	3	0	0	$[dd]^3$
9	$\{2\}$	$(4, 0)$	0	1	0	same orbital part as above
10	$\{2\}$	$(4, 0)$	2	1	0	
11	$\{2\}$	$(4, 0)$	4	1	0	
12	$\{2\}$	$(0, 2)$	0	1	0	
13	$\{2\}$	$(0, 2)$	2	1	0	
14	$\{11\}$	$(2, 1)$	1	1	1	
15	$\{11\}$	$(2, 1)$	2	1	1	
16	$\{11\}$	$(2, 1)$	3	1	1	

In the following $|LSJ\rangle$ is an abbreviation for $|\{f\}, (\lambda, \mu), L, S, J, T\rangle$. The contributions of the different tensor-operators $[X^{(k)} \times S^{(k)}]^0$ to the matricelement $\langle LSJ || V(1,2) || L'S'J \rangle$ are given by the following relation:

(3)

$$\sum_J (2J+1)(2k+1)^2 \left\{ \begin{matrix} L & L' & k \\ S & S' & k \\ J & J & 0 \end{matrix} \right\} \langle LSJ || V(1,2) || L'S'J \rangle =$$

$$(A_1 + A_2) \delta_{L,L'} \delta_{S,S'} + A_3 \delta_{S,1} \delta_{S',1} + A_4 \delta_{S,1} \delta_{S',1} + (A_5 + A_6) \delta_{S+S',1}$$

where the A_i denote the contribution from:

(a) the central part

(3a)

$$A_1 + A_2 = \sum_{v=1}^2 \langle L || X_v^{(0)} || L' \rangle \langle S || S_v^{(0)} || S' \rangle$$

(b) the LS-part

(3b)

$$A_3 = \langle L || X_3^{(1)} || L' \rangle \cdot \langle S || S_3^{(1)} || S' \rangle$$

(c) the tensor-part

(3c)

$$A_4 = \langle L || X_4^{(2)} || L' \rangle \langle S || S_4^{(2)} || S' \rangle$$

(d) the ALS-part

(3d)

$$A_5 + A_6 = \sum_{v=5}^6 \langle L || X_v^{(1)} || L' \rangle \langle S || S_v^{(1)} || S' \rangle$$

In eq. (3) we have accepted the obvious notation of ref. 4 and dropped the SU(3) and SU(6) labels of the two-particle states. For $k = 0, 1$ and 2 we have only contributions to (A_1, A_2) , (A_3, A_5, A_6) and A_4 respectively.^{*)} The LS- and ALS-parts can be further distinguished by the selection rules contained in eq. (3). It should be noted, that the ASL-part is the only one, which connects triplet and singlet states with each other ($S \neq S'$). Since T is diagonal, those states must have different orbital symmetries. From eqs. (3a) - (3d) we obtain:

$$\begin{aligned} & \langle L S j | [X_v^{(k)} \times S_v^{(k)}]^\circ | L' S' j \rangle = \\ & (-1)^{S+L'+j+k} (2k+1)^{-1/2} \left\{ \begin{matrix} L & S & j \\ s' & L' & k \end{matrix} \right\} \langle L || X_v^{(k)} || L' \rangle \langle S || S_v^{(k)} || S' \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

The unreduced matrixelement of eq. (4) is independent of J for central operators ($k = 0$). With the aid of eqs. (3) and (4) it is possible to determine the central and various non-central contributions (tensor, LS and ALS respectively) contained in any set of sd shell matrixelements. Thus a detailed comparison of different effective interactions is possible. Using the method, described above, we analysed the central and non-central components of a number of

*) The formulae given by Kirson differ from ours by a simple factor $(-1)^k (2k+1)^{1/2}$. The reason is, that he used scalar products of tensoroperators, while we used the tensorproduct in eq. (2).

microscopic and phenomenological two particle matrixelements for the sd-space. Those are the bare G-matrixelements, calculated by Kuo and Brown⁵⁾, and the matrixelements of Kuo⁶⁾ and Goode⁷⁾, including second order terms in G. The phenomenological interactions are represented here by the MSDI¹³⁾ and ASDI matrixelements.

2.2 Discussion of the results

The results of such a tensoranalysis are shown in figs. 1 - 4; and they are discussed in detail in the following.

2.2.1 Central part

The unreduced matrixelements of the central parts of the above mentioned interactions, calculated from eq. (4), are shown in fig. 1. From a comparison the following properties of the central-force contributions can be extracted:

- (a) All the various forces analysed exhibit a similar central contribution. In particular it seems to be important for the success of an effective interaction to reproduce the matrixelements of fig. 1 in the case of orbital symmetry $\{2\}$ and SU(3) quantum number (40).
- (b) The large negative matrixelements occur only between states, which have a symmetric orbital part ($\{f\} = \{2\}$). This reflects the well known fact, that states, belonging to the highest symmetry class in configuration space are lowest in energy. Moreover the microscopic matrixelements are slightly repulsive in all the antisymmetric states.

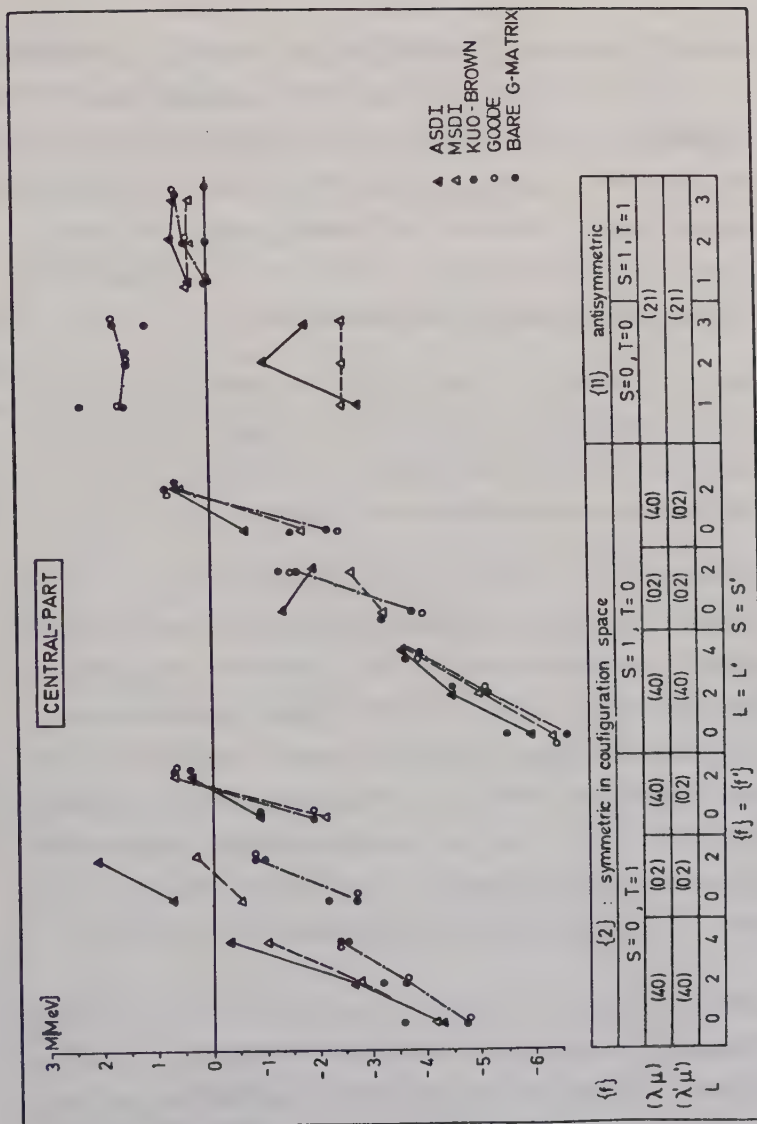


Fig. 1: Comparison of the unreduced matrixelements

$$M = \sum_{\lambda, \mu} \langle [f], (\lambda, \mu), L, S, J, T | [X_{\lambda, \mu}^{(2)} \times S_{\lambda, \mu}^{(2)}]^{(0)} | [f'], (\lambda', \mu'), L', S', J', T' \rangle$$
 of eq. (4) for the central component of sd-shell matrixelements, indicated in the figure. The states are labelled by their orbital symmetry $\{f\}$, $SU(3)$ -representation (λ, μ) , L, S and T as listed in table 1 (from eq. (4) it is obvious, that M is independent on J).

- (c) Another interesting property of the effective interactions is seen, by investigating the $SU(3)$ quantumnumbers. Strong attraction occurs predominantly between states, which have the same $SU(3)$ quantumnumbers. The leading $SU(3)$ representation (40) is favoured; as a consequence, the central components of all effective interactions are expected to reflect an approximate $SU(3)$ -symmetry.
- (d) The attraction in states of orbital symmetry $\{f\} = \{2\}$ and with $SU(3)$ quantumnumber (40) is generally stronger by about 2 MeV for the triplet (i. e. $S = 1, T = 0$) than for the singlet state (i. e. $S = 0, T = 1$).

From this analysis we have seen that the central parts of the different interactions exhibit some common and quite general features which become obvious in a $SU(3)$ basis. The phenomenological interactions, such as $MSDI^{+})$, also simulate the contribution from the second order tensor interaction to the central component, as it is contained in the Kuo-Brown matrix-elements. The fact, that the pure central $MSDI$ -interaction describes the gross-structure of low lying states of several sd-shell nuclei rather well is an indication, that the

+) The monopole term B_T of the $MSDI$ -interaction ^{11,17)} is clearly responsible for the stronger attraction in the ($S = 1, T = 0$) states compared to ($S = 0, T = 1$) states. This is seen to be a phenomenological description of the same effect, observed for the microscopic interactions in fig. 1.

appropriate central part is a prerequisite for any realistic effective interaction. The non-central components are apparently responsible for improvements of the spectra and wavefunctions (see also section 4).

2.2.2 Tensor part

In fig. 2, the reduced matrixelements A_4 of eq. (3c) are shown. This representation has the advantage, that the explicit J-dependence in eq. (4) can be avoided. From the results of fig. 2: we can draw the following conclusions:

- (a) The tensor parts of the various microscopic interactions (ref. 5, 6 and 7) agree quite well with each other.
- (b) The agreement, however, between microscopic and empirical matrixelements is rather poor. Especially for $T = 1$ it seems as if there were a sign difference; the moduli of their tensorparts are in fact quite comparable.^{+) The consequences of those discrepancies for the spectra will be discussed in section 4.}

^{+) This cannot be explained by phase conventions since the phase of the Kuo interaction agree with those of the Oak-Ridge-Rochester shell model code, used to derive the ASDI matrixelements¹³⁾.}

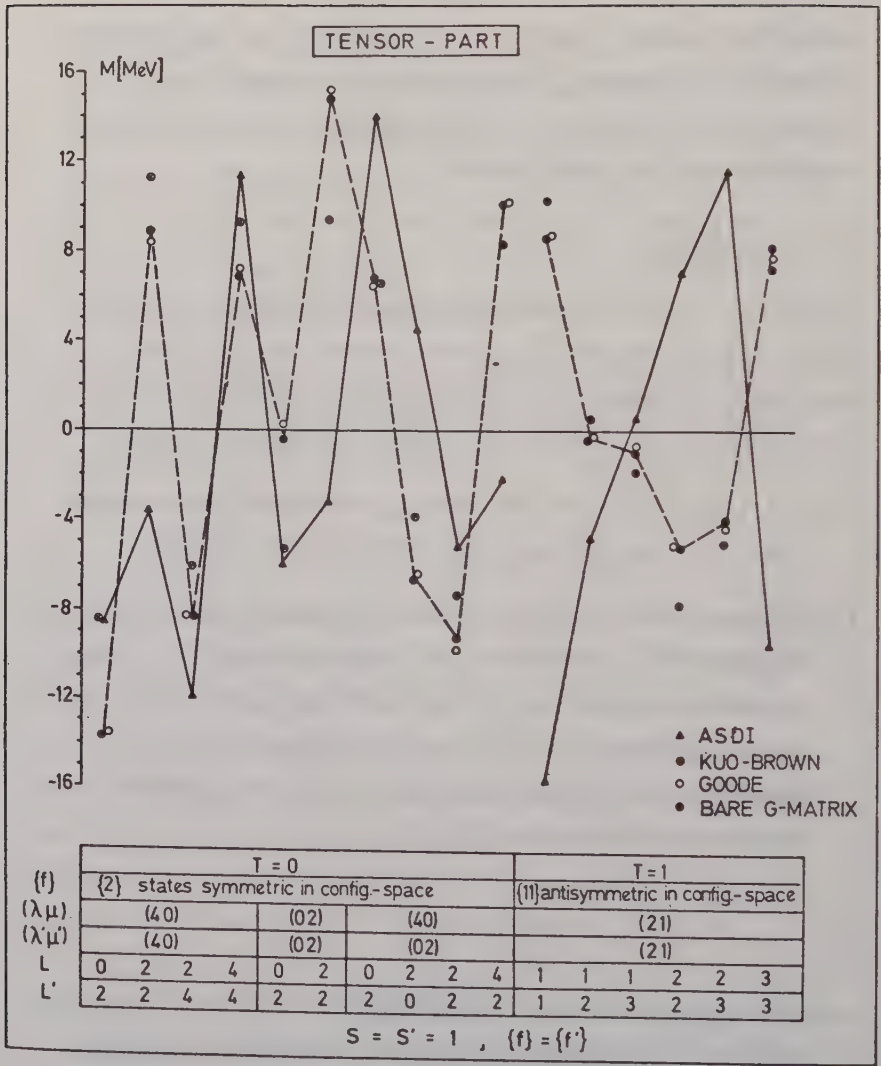


Fig. 2: Reduced matrixelements $M = \langle \parallel x_4^{(2)} \parallel \rangle \langle \parallel s_4^{(2)} \parallel \rangle$ of eq. (3c) for the tensorcomponent. Notation as in fig. 1.

(c) In contrast to the central interaction the tensor-interaction obviously does not discriminate between states with different orbital symmetries. Due to the symmetry of the tensoroperator $S_4^{(2)}$ there is clearly no coupling between the two symmetry-classes. However $SU(3)$ nondiagonal matrixelements of the tensorinteraction between states to the (40) and (02) representation are of the same size or even larger than the diagonal ones (c. f. also tables 2 and 3).

2.2.3 LS and ALS part

Similar remarks as for the tensorcomponent also hold for the LS- and ALS-components of the various interactions, shown in figs. 3 and 4, where the reduced matrixelements A_3 and $(A_5 + A_6)$, respectively, of eq. (3) are given. Once again, the microscopic matrixelements of Kuo-Brown and Goode agree very well with each other. However appreciable deviations between the ASDI-matrixelements and the microscopic ones are observed. In particular the ALS component of the former is much stronger. A further discussion of this point is postponed to section 5. As a final remark let us note, that due to the antisymmetry of the operators $S_5^{(1)}$ and $S_6^{(1)}$ of eq. (1) the ALS part is the only one, which connects two-particle states of different orbital symmetry which therefore belong to different $SU(3)$ representations.

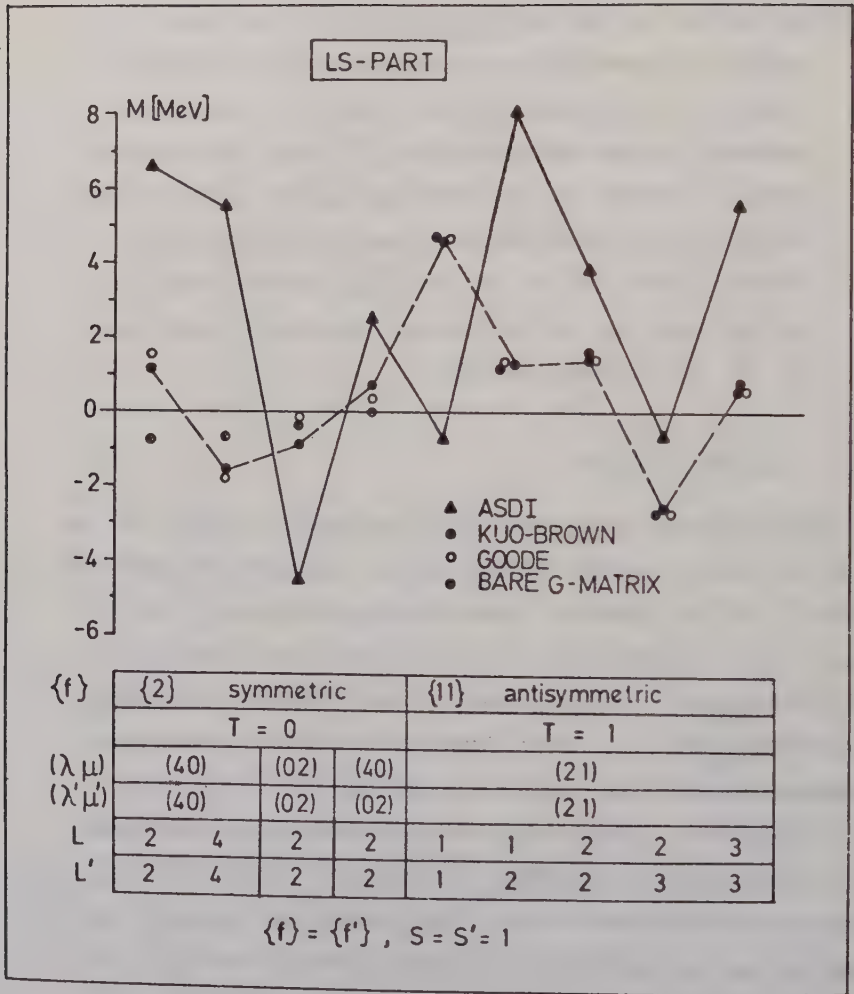


Fig. 3: Reduced matrixelements $M = \langle \parallel X_3^{(1)} \parallel \rangle \langle \parallel S_3^{(1)} \parallel \rangle$ of eq. (3b) for the LS-component. Notation as in fig. 1.

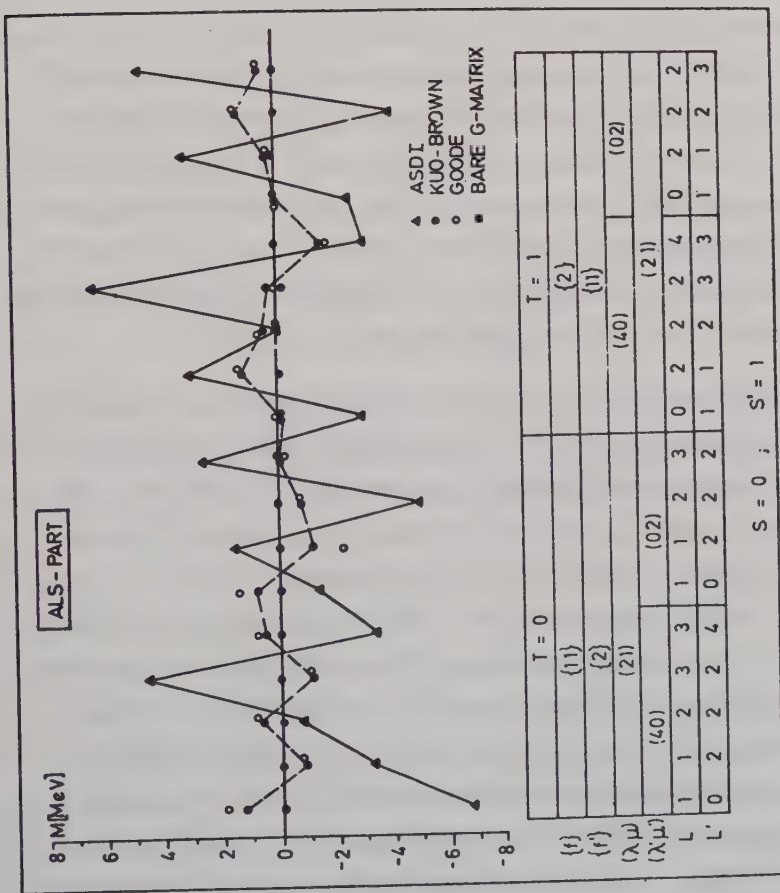


Fig. 4: Reduced matrixelements $M = \sum_{\nu=5}^6 \langle ||X_{\nu}^{(2)}|| \rangle \langle ||S_{\nu}^{(2)}|| \rangle$ of eq. (3d) for the ALS-component. Notation as in fig. 1.

2.2.4 Other interactions and comments

Freedom and Wildenthal¹⁴⁾ have obtained another set of sd-shell matrixelements by a phenomenological modification of some of the Kuo-Brown matrixelements. Those matrixelements have also been decomposed into tensorparts. The results are quite similar to those obtained for Kuo-Brown matrixelements and therefore have been omitted in the figures. It should be noted however, that some of the ALS and LS matrixelements are enlarged over the Kuo-Brown values.

From the analysis of the bare G-matrixelements we find, the most striking influence of second order terms on the ALS-part, whereas the central-, tensor- and LS-parts are comparable to those, which result from the inclusion of second order terms. This feature is clearly shown in figs. 1 - 4. Thus it can be concluded that the ALS-part of the effective interaction is particularly influenced by the core polarisation terms. As it was pointed out by Barrett and Kirson⁸⁾ contributions of third order terms in G however partially cancel the second order contribution. Therefore it seems interesting to extend the present analysis also to third order terms. From such an investigation it might be possible to obtain information about the influence of higher order terms on the different tensorcomponents of the effective interaction. Such a detailed order by order analysis is presently in preparation. In connection with the discrepancies observed for the tensorparts it is interesting to note, that a constant factor of (-3) for the Kuo-Brown tensorpart in

the $S = 1$, $T = 1$ channel would split up the $K = 0$ and $K = 2$ band of ^{24}Mg ¹⁵⁾, confirming the sign prediction of the ASDI matrixelements. For a more detailed information on the Kuo-Brown and ASDI interaction we give the decomposition of the matrixelements for $(T = 1)$ and $(T = 0)$ -states in tables 2a, b and 3a, b, respectively. In order to allow also for a direct comparison between the different components of a given interaction, we have chosen an unreduced representation of the various matrixelements (see eq. (4)). It should be noted that in figs. 2 - 4 only reduced values are shown.

It is obvious, that the largest and most frequent noncentral contributions to the total matrixelement arise from the tensor-interaction, for both the ASDI and the Kuo-Brown matrixelements. However one must be careful in drawing conclusions on the relative importance of the various tensorcomponents from two-particle matrixelements alone (c. f. section 4). The deviations between the ASDI and Kuo-Brown matrixelements already observed in the figures are also clearly exhibited in the tables. Apart from sign differences the increase of non-central components in the ASDI-interaction over the Kuo-Brown values is remarkable. Consequently the non-central components of the effective interaction are rather undetermined and further investigation is necessary, to get definite answers. It should be emphasized, that Kuo⁶⁾ and Goode⁷⁾ use the same G-matrix and second order corrections G_{3p1h} , G_{2h} and G_{2p} , so that the agreement between the two sets of matrixelements is not really surprising. However, an investigation of microscopic matrixelements, which are derived from a different G-matrix, such as the BHM-matrixelements¹⁸⁾, yields no significantly different results¹⁵⁾. Therefore we will not discuss this aspect any further.

J	N_i	N_f	central	tensor	LG	ALS
0	1	1	-4.7394			
	1	4	-1.8987			
	1	14				-0.0536
	4	4	-2.7075			
	4	14				-0.0073
1	14	14	0.0777	1.2905	0.8837	
	14	14	0.0777	-0.6452	0.4418	
	14	15		0.0304	-0.1280	
	15	15	0.3933	-0.3556	0.1791	
2	2	2	-3.5883			
	2	5	0.6603			
	2	14				0.1784
	2	15				0.0780
	2	16				0.0385
	5	5	-0.8144			
	5	14				0.0406
	5	15				0.1949
	5	16				0.0799
	14	14	0.0777	0.1290	-0.4418	
	14	15		-0.0136	-0.1718	
	14	16		-0.0849		
	15	15	0.3933	0.3556	0.0597	
	15	16		0.2934	0.2213	
	16	16	0.6021	0.3888	0.0617	
3	15	15	0.3933	-0.1016	-0.1194	
	15	16		-0.1754	0.2646	
	16	16	0.6021	-0.4860	0.0154	
4	3	3	-2.4284			
	3	16				-0.1735
	16	16	0.6021	0.1620	-0.0463	

Table 2 a) The unreduced central and noncentral matrix-elements of eq. (4) are given for the Kuo-Brown matrix-elements ⁶⁾ in SU(3)-basis for $T = 1$. The numbers N_i and N_f are related to the quantumnumbers $\{f\}$, (λ, μ) , L and S as defined in table 1.

J	u_i	u_f	central	tensor	LS	ALC
	1	1	-4.4833			
	1	4	-0.9098			
	1	14				-0.9900
	4	4	0.7154			
	4	14				-0.8535
	14	14	0.3654	-2.3274	-0.1373	
1	14	14	0.3654	1.1637	-0.0686	
	14	15		0.4820	-0.7747	
	15	15	0.6570	0.4800	0.4936	
2	2	2	-2.6786			
	2	5	0.4126			
	2	14				0.4490
	2	15				-0.0002
	2	16				0.9424
	5	5	2.1209			
	5	14				0.4619
	5	15				-0.6135
	5	16				0.6919
	14	14	0.3654	-0.2327	0.0686	
	14	15		-0.2155	-1.0393	
	14	16		0.0503		
	15	15	0.6570	-0.4800	0.1645	
	15	16		-0.8424	0.0600	
	16	16	0.6063	-0.4528	0.5708	
3	15	15	0.6570	0.1371	-0.3291	
	15	16		0.5034	0.0717	
	16	16	0.6063	0.5660	0.1427	
4	3	3	-0.3149			
	3	16				-0.3422
	16	16	0.6063	-0.1887	-0.4281	

Table 2 b) Same as table 2 a for the ASDI matrixelements ¹¹⁾
(T = 1).

J	N_i	N_f	central	tensor	LS	ALS
1	9	9	-6.5851			
	9	10		-1.5685		
	9	12	-2.1775			
	9	13		0.7792		
	10	10	-5.1121	0.6092	0.1538	
	10	12		-0.7608		
	10	13	0.8352	-0.6313	0.0962	
	12	12	-3.8015			
	12	13		-0.0047		
	13	13	-1.5473	1.0133	-0.1141	
	9	6				0.2531
	10	6				-0.1503
	12	6				0.1492
	13	6				-0.2250
2	6	6	1.5973			
	10	10	-5.1121	-0.6092	0.0513	
	10	13	0.8352	0.6313	0.0321	
	13	13	-1.5473	-1.0133	-0.0380	
	10	7				0.0979
	13	7				-0.1155
3	7	7	1.5094			
	10	10	-5.1121	0.1741	-0.1025	
	10	11		-0.6291		
	10	13	0.8352	-0.1804	-0.0641	
	11	11	-3.9094	0.2695	-0.1353	
	11	13		0.7674		
	13	13	-1.5473	0.2895	0.0760	
	10	8				-0.1385
4	11	8				0.0677
	13	8				-0.0114
5	8	8	1.7282			
	11	11	-3.9094	-0.3772	-0.0271	
5	11	11	-3.9094	0.1372	0.1082	

Table 3 a)

Same as table 2 a for Kuo-Brown matrixelements ⁶⁾
(T = 0).

J	N ₁	N _f	central	tensor	LS	ALS
1	9	9	-6.0169			
	9	10		-0.9955		
	9	12	-1.1462			
	9	13		1.6106		
	10	10	-4.4771	-0.2497	0.8493	
	10	12		0.5175		
	10	13	0.6472	-0.3533	0.3275	
	12	12	-1.3309			
	12	13		-0.7000		
	13	13	-1.9157	-0.2227	-0.5866	
	9	6				-1.3174
	10	6				-0.6250
	12	6				-0.2680
	13	6				0.2944
	6	6	-2.7741			
2	10	10	-4.4771	0.2497	0.2831	
	10	13	0.6472	0.3533	0.1092	
	13	13	-1.9157	0.2227	-0.1955	
	10	7				-0.1125
	13	7				-0.7467
	7	7	-1.0007			
3	10	10	-4.4771	-0.0713	-0.5662	
	10	11		-0.9026		
	10	13	0.6472	-0.1009	-0.2184	
	11	11	-3.6259	0.4326	0.4855	
	11	13		-0.1660		
	13	13	-1.9157	-0.0636	0.3911	
	10	8				0.5651
	11	8				-0.4314
	13	8				0.3242
	8	8	-1.8552			
4	11	11	-3.6259	-0.6056	0.0971	
5	11	11	-3.6259	0.2202	-0.3384	

Table 3 b) Same as table 2 a for ASDI matrixelements 11)
(T = 0).

3. Detailed analysis of the ASDI matrixelements

In this section we are only concerned with properties of the ASDI matrixelements, which in fact give the best description of the low energy properties of nuclei in the mass-region $A = 24 - 28$. In order to demonstrate the influence of non-central forces also in the usual jj basis, we made the inverse transformation to the above outlined decomposition of eq. (3) into tensor-parts. That means, for a given tensorpart of ASDI we determine the corresponding contribution to the complete matrixelements in jj basis. The two particle states are now characterized by $|(j_1 j_2)^{JT} \rangle$. The results are shown separately for states with $T = 0$ and $T = 1$ respectively.

3.1 ($T = 0$) states

In fig. 5 the contributions of the central-, tensor-, LS- and ALS parts to the ASDI matrixelements are shown for diagonal and non-diagonal matrixelements respectively. It is obvious, that the diagonal matrixelements are very large and dominated by their central parts. The non-central parts are generally small compared to the central ones, though not negligible. For the non-diagonal matrixelements the non-central contributions become comparable to the central ones and sometimes exceed them. The complete non-diagonal matrixelement is composed in a complicated way from its four tensorparts. It should be pointed out however, that for transitions $(d)^2$ to $(s)^2$ strikingly large contributions up to about 1.5 MeV in

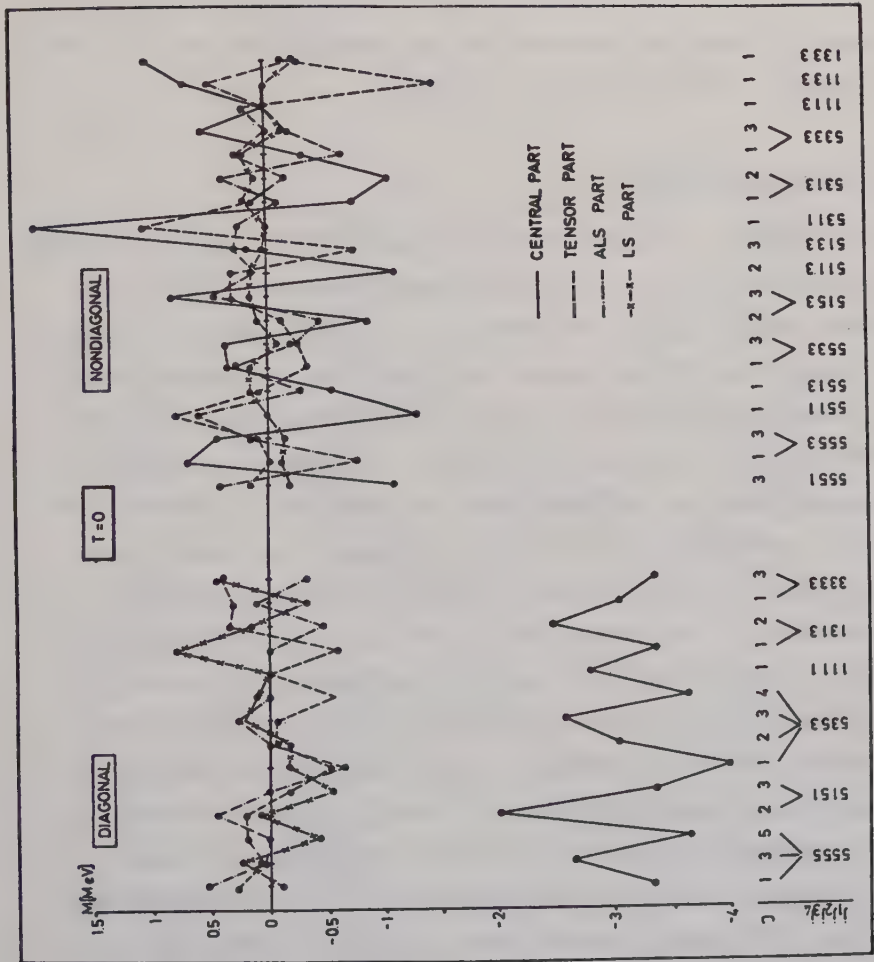


Fig. 5: Central-, tensor-, LS- and ALS-contributions to the ASDI matrixelements in jj -basis for $T = 0$ states. The total ASDI matrixelement $\langle j_1 j_2^{JT} | V | j_3 j_4^{JT} \rangle$ is the sum of the four parts shown.

absolut value are observed for the tensorinteraction as it is expected from its analytic structure.

3.2 (T = 1) states

For the (T = 1) matricelements the situation is quite different. As shown in fig. 6 the contributions of the non-central and the central parts to the total matricelement are in fact quite comparable both for diagonal and non-diagonal matricelements. Large contributions to diagonal matricelements are frequently due to the tensor- and the ALS-part. However no generally valid rules can be established. For nondiagonal matricelements all three types of non-central interactions are equally important. In this connection, there arises an interesting question: If the non-central contributions are so large how is it possible to get reasonable results by using central effective interactions only? The answer is found from fig. 7a and 7b, where the central part and the total ASDI matricelements are compared for the T = 0 and T = 1 matricelements respectively. They clearly exhibit, that inspite of some exceptions, the total ASDI matricelements differ not too much from their central parts. A more detailed information can be obtained from table 4a and 4b, where numerical values of central and noncentral matricelements are listed. The sum of the non-central matricelements and the total ASDI matricelements together with the MSDI matricelements are also given. From a comparison the following conclusions can be drawn:

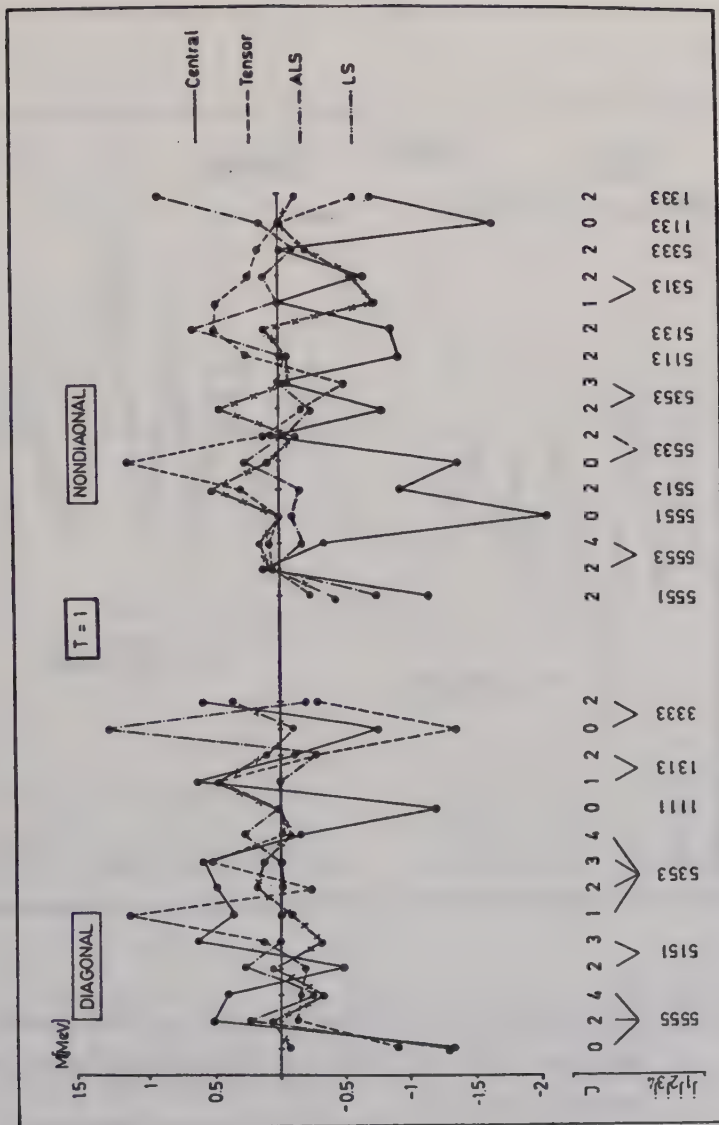


Fig. 6: Central-, tensor-, LS- and ALS-contributions to the ASDI matrixelements in jj -basis for $T = 1$ states. Notation as in fig. 5.

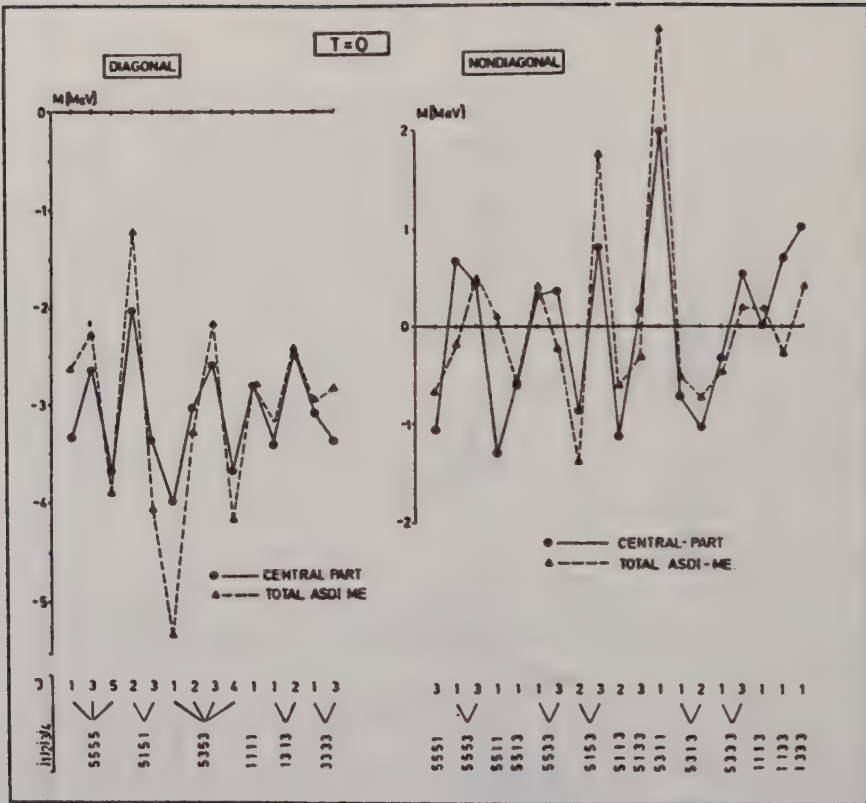


Fig. 7 a) Comparison of the central part of the ASDI matrix-elements with the total ASDI matrixelements for $T = 0$ states in jj -basis.

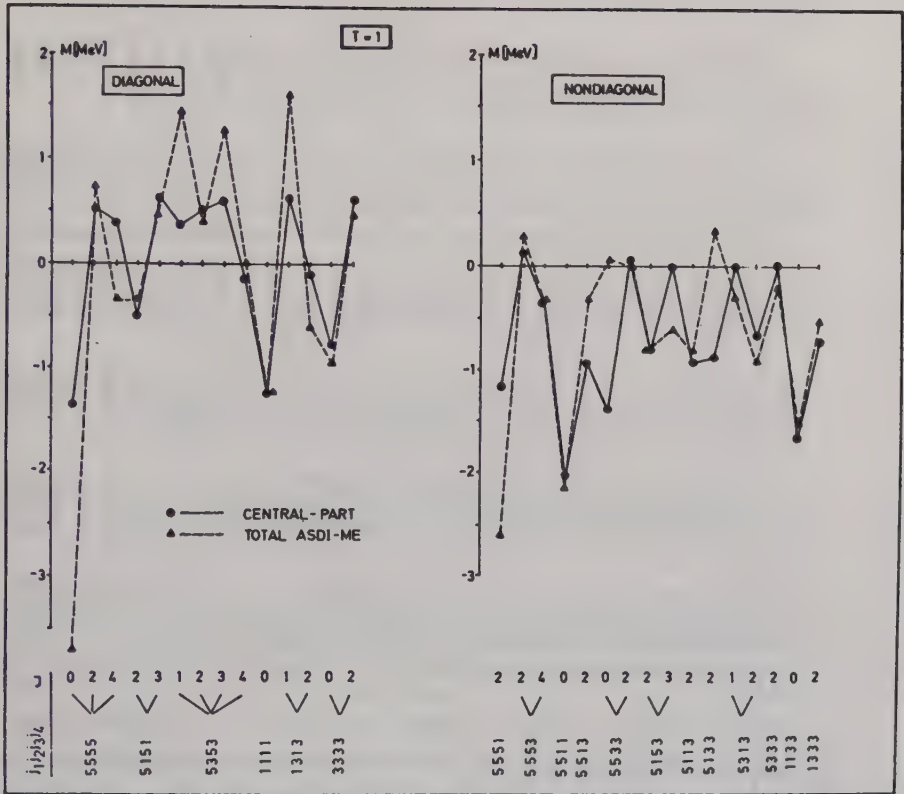


Fig. 7b) Comparison of the central part of the ASDI matrix-elements with the total ASDI matrixelements for $T = 1$ states in jj -basis.

Table 4 a

j_1	j_2	j_3	j_4	j	central	tensor	LS	ALS	non-central	total	MSDI
5	5	5	5	1	-3.3119	0.2720	-0.0864	0.5219	0.7075	-2.6044	-3.4042
5	5	5	3	3	0.7002	-0.0109	-0.1143	-0.7662	-0.8914	-0.1912	1.2966
5	5	5	1	1	-1.2995	0.7931	0.0000	0.6011	1.3942	0.0947	-0.8456
5	5	5	3	3	-0.5698	0.0660	0.1660	-0.3087	-0.0767	-0.6464	-0.4832
5	5	5	3	3	0.3407	-0.3341	0.1616	0.2914	0.1189	0.4597	0.8404
5	5	5	3	3	-3.9821	-0.5049	-0.1512	-0.6538	-1.3099	-5.1299	-4.8131
5	5	5	3	3	1.9647	1.0491	0.0000	0.2272	1.2763	3.2410	1.2785
5	5	5	3	3	-0.7537	0.1100	0.2196	-0.1167	0.2129	-0.5400	-0.6392
5	5	5	3	3	-0.3039	0.2517	0.2138	-0.6624	-0.1969	-0.5008	-0.4043
5	5	5	3	3	-2.7951	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-2.7951	-2.9349
5	5	5	3	3	0.0000	0.1727	0.0000	0.0000	0.1727	0.1727	0.0000
5	5	5	3	3	0.6946	-1.4837	0.0000	0.4820	-1.0017	-0.3071	0.4520
5	5	5	3	3	-3.3697	-0.5375	0.8025	0.0000	0.2650	-3.1047	-3.6696
5	5	5	3	3	1.0159	-0.1342	-0.3106	-0.2475	-0.6923	0.3737	0.9040
5	5	5	3	3	-3.0558	0.2980	-0.3023	0.1318	0.1275	-2.9283	-3.0379
5	5	5	3	3	-1.9483	0.2150	0.1070	0.4421	0.7641	-1.1842	-2.8420
5	5	5	3	3	-0.9009	-0.1170	0.0875	-0.4689	-0.4984	-1.3994	-0.7640
5	5	5	3	3	-1.1606	0.2633	0.1311	0.0902	0.4846	-0.6760	-0.7002
5	5	5	3	3	-3.0231	-0.0651	-0.1799	0.0000	-0.2450	-3.2681	-3.2613
5	5	5	3	3	-1.1033	-0.1433	0.1072	0.3829	0.3468	-0.7566	-0.9357
5	5	5	3	3	-2.4221	0.3225	0.1605	-0.4421	0.4049	-2.3812	-3.0379
5	5	5	3	3	-2.6164	0.0877	0.2332	0.0598	0.3807	-2.2357	-2.8337
5	5	5	3	3	-1.1190	0.1737	-0.2173	0.3907	0.3471	-0.7719	-0.9490
5	5	5	3	3	0.4497	0.0775	-0.1422	0.1433	0.0706	0.5283	0.4244
5	5	5	3	3	0.3630	-0.2656	-0.1036	-0.2133	-0.5025	-0.2196	0.2451
5	5	5	3	3	-3.3697	-0.1536	-0.5350	0.0000	-0.6806	-4.0503	-3.6696
5	5	5	3	3	0.8614	0.3114	0.1673	0.4512	0.9299	1.7913	0.7206
5	5	5	3	3	0.4856	-0.8000	0.0362	0.2605	-0.5033	-0.3168	0.1582
5	5	5	3	3	-2.5555	-0.0590	0.2065	0.2312	0.2937	-2.1568	-2.7712
5	5	5	3	3	0.5385	-0.0139	-0.1445	-0.1969	-0.3553	0.1822	0.2029
5	5	5	3	3	-3.3323	0.4226	0.4057	-0.3110	0.5173	-2.8151	-3.0979
5	5	5	3	3	-3.6259	-0.6057	0.0971	0.0000	-0.5086	-4.1345	-3.2613
5	5	5	3	3	-3.6259	0.2202	-0.3884	0.0000	-0.1682	-3.7941	-3.2613

Table 4 a) Decomposition of the ASDI matrixelements (in jj -basis) for $T = 0$ into central and non-central components. In the last column the MSDI matrixelements are given for comparison (note that the single particle quantumnumbers are denoted by $2j$).

Table 4 b

j_1	j_2	j_3	j_4	j	central	tensor	LS	ALS	non-central	total	MSDI
5	5	5	5	0	-1.3534	-0.9310	-0.0549	-1.2699	-2.2558	-3.6092	-2.1333
5	5	1	1		-2.0793	0.000	0.0000	-0.1068	-0.1068	-2.1861	-1.6830
5	1	3	3		-1.4034	1.1402	0.0673	0.2592	1.4663	-0.3801	-2.3801
1	1	1	1		-1.2686	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2686	-0.1900
1	1	3	3		-1.6977	0.0000	0.0000	0.1308	0.1308	-1.5669	-1.3741
3	3	3	3		-0.7804	-1.3955	-0.0824	1.2700	-0.2089	-0.9893	-1.1616
3	3	5	3	1	0.3654	1.1637	-0.0686	0.0000	1.0951	1.4605	0.7817
5	3	1	3		0.0000	0.4820	-0.7747	0.0000	-0.2927	-0.2927	0.0000
1	3	1	3		0.6571	0.4800	0.4936	0.0000	0.9736	1.6307	0.7817
5	5	5	5	2	0.5488	-0.1188	0.0719	0.2432	0.1963	0.7450	0.1154
5	5	5	1		-1.1938	-0.2342	-0.4298	-0.7958	-1.4598	-2.0536	-0.8814
5	5	5	3		0.1501	0.0566	0.0449	0.0479	0.1494	0.2994	-0.4712
5	5	1	3		-0.9718	0.2868	0.5264	-0.1659	0.6473	-0.3274	-0.7197
5	5	3	3		0.0738	0.1032	-0.1356	-0.0311	-0.0035	0.0103	-0.5089
5	1	5	1		-0.4986	-0.1920	0.0658	0.2836	0.1574	-0.3412	-0.3843
5	1	5	3		-0.8442	-0.1728	0.4898	-0.2837	0.0393	-0.8148	-0.6232
5	1	1	3		-0.9436	0.2352	-0.0806	-0.0579	0.0967	-0.8469	-0.9520
5	1	3	3		-0.9118	0.4666	0.1129	0.6579	1.2374	0.3257	-0.6732
5	3	3	3		0.5101	-0.2693	0.1807	-0.0359	-0.1425	0.3676	0.4485
5	3	1	3		-0.6893	0.2116	-0.5950	0.1105	-0.2729	-0.9621	-0.5099
5	3	3	3		-0.0103	0.1753	-0.2261	-0.1167	-0.1675	-0.1778	-0.3598
1	3	1	3		-0.1134	-0.2880	0.0987	-0.2836	-0.4729	-0.5862	-0.0044
1	3	3	3		-0.7445	-0.5715	-0.1383	0.9068	0.1970	-0.5475	-0.5497
3	3	3	3		0.6241	-0.2974	0.3869	-0.1893	-0.0998	0.5243	0.3931
5	1	5	1	3	0.6571	0.1372	-0.3291	0.0000	-0.1919	0.4651	0.7817
5	1	5	3		0.0000	-0.5034	-0.0717	0.0000	-0.5751	-0.5751	0.0000
5	3	5	3		0.6063	0.5660	0.1427	0.0000	0.7087	1.3150	0.7817
5	5	5	5	4	0.4221	-0.1509	-0.3425	-0.2737	-0.7671	-0.5041	-0.5552
5	5	5	3		-0.3685	0.0755	0.1712	-0.2053	0.0414	-0.3271	-0.5552
5	5	5	5		-0.1907	-0.0377	-0.0856	0.2737	0.1504	0.0197	-0.3288

Table 4 b) Same as table 4 a for T = 1.

- (a) for several matrixelements their non-central contributions partially cancel. Consequently the total matrixelement can be represented approximately by its central value.
- (b) the non-central contribution to the central part leads in some cases to total matrixelements close to the corresponding MSDI values. Therefore effects of non-central interactions can be simulated by a purely central interaction.
- (c) however there are also several cases, where the values of the ASDI matrixelements depend sensitively on the non-central components and are also very different from the corresponding MSDI values.

The fact, that purely central forces work rather well in sd-shell calculations is apparently due to the first two effects. However, the improvement, obtained with the ASDI matrixelements^{10,11)} and the result (c) obviously show, that the inclusion of non-central components in the effective interaction is necessary, to improve the results of sd-shell calculations.

Let us conclude this section with some remarks on the results obtained so far. A general statement, similar to the approximate $SU(3)$ -symmetry of the central part of the ASDI matrixelements, cannot be made in the jj -basis. Obviously the physical significance of the central and non-central components is more transparently exhibited in the $SU(3)$ -basis. The question, which type of the non-central interactions is

dominating, cannot be answered in general, since different matrixelements are sensitive to different non-central parts. In order to further investigate this problem we calculated the spectrum of ^{28}Si by successively switching on and off the different non-central parts of the ASDI matrixelements as described in the next section.

4. The influence of non-central components on the spectrum of ^{28}Si

In the previous sections we have discussed the dependence of the two-particle matrixelements on their tensorparts. However from such a discussion only the influence of non-central interactions on simple two-particle systems, such as ^{18}O and ^{18}F , can be extracted. For example the tensor-, and LS-forces are expected to produce only small effects in the low energy spectrum of ^{18}O because we have $S = 0$ for states with orbital symmetry $\{2\}$. On the other hand for ^{18}F , where $S = 1$ for symmetric states the spectrum is much more sensitive to the tensor- and LS-component (especially states with J odd; c. f. tables 2a and 2b).

To obtain further information about the sensitivity of sd-shell spectra to the various tensor components, we calculated the spectrum of ^{28}Si , using several approximations to the total ASDI interaction. The results are shown in figs. 8a and 8b for states with J even and J odd, respectively. The same single particle energies $\epsilon_{d_{5/2}} = -4.84$ MeV, $\epsilon_{s_{1/2}} = -2.57$ MeV and $\epsilon_{d_{3/2}} = -2.09$ MeV have been used to calculate the spectra (1) - (4), shown in the figures. In fig. 8 a the ground state binding energy E_B is indicated below each spectrum.

Let us first discuss fig. 8a. It is obvious from spectrum (1), that the experimental level density and level sequence for energies greater than 5 MeV cannot be reproduced if only the central part of the ASDI matrixelements is used. For lower

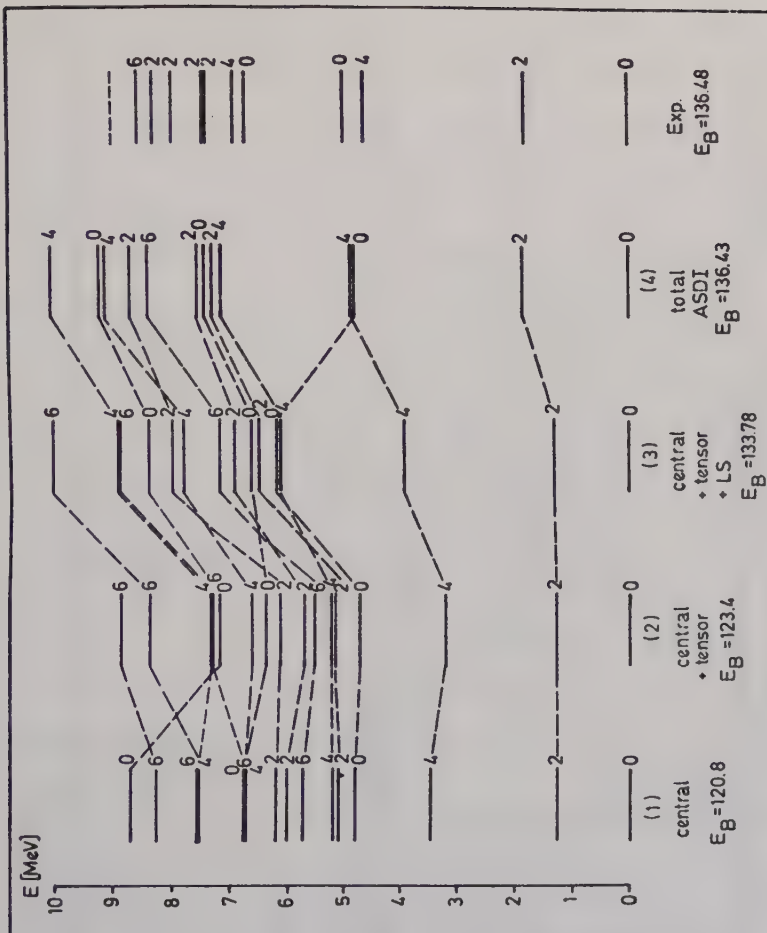


Fig. 8 a) The calculated spectra (1) - (4) of ^{28}Si , using several combinations of the tensor components of the ASDI matrixelements are compared with each other and the experimental spectrum. Only states with J even and positive parity are shown. Below each spectrum, the corresponding ground state binding energies are given. The experimental data are taken from ref. 16.

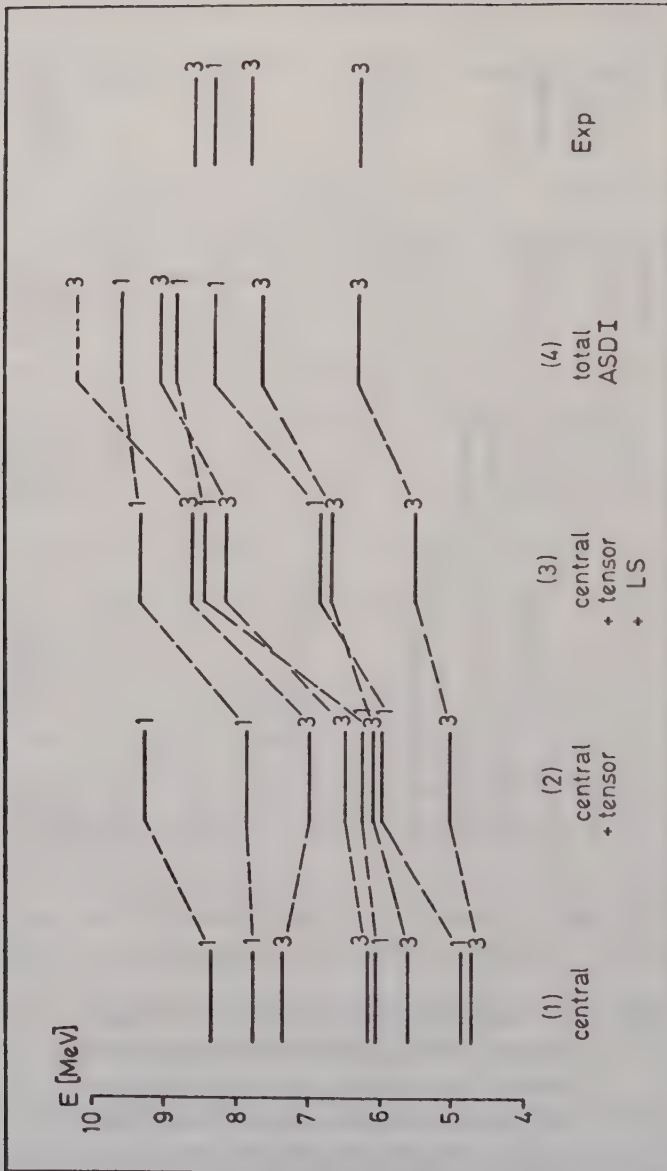


Fig. 8 b) Same as fig. 8 a for states with J odd.

lying states the level sequence is the right one, but the relative spacings are incorrect. From $SU(3)$ considerations, such a behaviour of the central part must be expected, since both the $(12,0)$ and $(0,12)$ and the $(9,3)$ and $(3,9)$ representations respectively lead to doubly degenerate levels for a $SU(3)$ -invariant QQ -interaction. Apparently the breaking of the $SU(3)$ symmetry due to the central part is not strong enough (c. f. section 2.2.1), to describe the ^{28}Si -spectrum. However it provides already a rough approximation to the low energy spectrum. Furthermore the calculation poorly reproduces the experimental ground-state binding energy E_B of 136.48 MeV, showing a discrepancy of about 16 MeV. On the other hand, the MSDI interaction¹¹⁾ leads to a value of E_B differing only by about 0.6 MeV from the experimental value. Furthermore the MSDI-spectrum of ^{28}Si ¹¹⁾ looks quite different, compared to the spectrum generated by the central part of the ASDI matrix-elements. Therefore, the conclusion drawn from the two-particle matrixelements that effects of non-central interactions can be simulated by central forces is confirmed. However the comparison of the MSDI spectrum¹¹⁾ with the experimental one clearly indicates that for an improved description non-central forces must be taken into account. The second spectrum shows a surprising result. Although the tensorinteraction gave appreciable contributions to the two-particle matrixelements, its addition to the central part has only small effects on the low energy-part of the spectrum. In particular, the group of levels between 5 and 6.5 MeV, which is not observed experimentally, is rather unaffected by the tensor-force. Likewise

the ground state binding energy is only slightly increased by 2.6 MeV.

However the discrepancy between experimental and theoretical binding energies is considerably reduced, if the LS-part is added. In addition the spectrum as a whole is seen to be very sensitive to this LS-component. The group of states at about 5 MeV is pushed upwards and the experimentally observed gap between 5 MeV and 6.7 MeV is clearly indicated. Finally the spectrum is shifted upwards again by the ALS-component with the exception of the second 0_2^+ -state. The correction to E_B gives the final agreement with experiment. Probably the ALS-component is somewhat overestimated, so that the level-inversion of the first excited 0^+ - and the 4^+ -state arises. The final position of the first 2^+ -state is mainly due to the ALS-interaction.

Turning now to fig. 8b a similar behaviour can be observed for states with J odd. The 1^+ and 3^+ states are too low and too dense in spectrum (1). Only when the noncentral components are added, the right level density is reproduced. Note that in this case of J odd the tensorinteraction is somewhat more important, than for J even states.

Let us conclude this section with some summarizing remarks. It is well known, that a description of sd-shell nuclei within the SU(3) model, combined with a QQ-force, produces too large level-densities in the low energy region. Therefore the same deficiencies of the central force observed in spectrum (1) of fig. 8 a are expected for other sd-shell nuclei. In contrast

to what is suggested from the analysis of the two-particle matrix elements the influence of the tensor interaction on the spectrum of ^{28}Si is not so drastic. Of course, the spectra (2) and (3) of figs. 8a and 8b depend on the sequence chosen to add the non-central components to the central one. However independently of this sequence it turns out, that the increase in binding energy is mainly due to the LS-component and the above mentioned gap is produced by both the LS- and ALS-component. Of course the observations of this section are very specific and need further confirmations in other nuclei, covering a wider range of the sd-shell and including electromagnetic properties.

5. Summary and conclusions

The decomposition of two particle matrixelements for the sd-space into their tensorparts exhibits obvious similarities for the central part of both, the phenomenological and microscopic effective interactions: Firstly it is clearly much stronger in space symmetric than in space-antisymmetric two-particle states and secondly an approximate $SU(3)$ -symmetry is preserved. Consequently the central part of the effective sd-shell interaction is determined rather well and the structure of its matrixelements is already predictable from orbital and $SU(3)$ -symmetry considerations. It turns out, however, that the resulting spectra are very sensitive to the details of the breaking of those symmetries. For example larger deviations between the MSDI matrixelements and the central part of the ASDI matrixelements occur only in states with $(\lambda\mu) = (02)$ and antisymmetric states with $T = 0$ and $S = 0$. We have seen, however, that those differences can lead to quite different results. Obviously one must be careful, to relate directly the properties of the free NN-interaction and the effective interaction with each other. Nevertheless the results of fig. 1 also indicate similarities, such as the preference of the space-symmetric triplet - over the singlet - states by the central part. The non-central parts of both microscopic and phenomenological interactions (represented here by Kuo-Brown and ASDI matrixelements respectively) turn out to be rather different. Large uncertainties are involved in those parts of the effective interaction and no general

structure of their matrixelements can be derived. Since the tensorcomponent of the ASDI set turned out to be rather unimportant for the spectrum of ^{28}Si , the sign difference to the microscopic prediction may have no drastic influences on the spectra. On the other hand the increased LS-components of the ASDI matrixelements, compared to Kuo-Brown values, strongly influences the spectrum and is mainly responsible for the increase of the ground state binding energy. It seems appropriate at this stage, to discuss the ALS component which is strongly enhanced for the ASDI matrixelements and clearly necessary for fitting the spectrum of ^{28}Si . It is a specific property of effective interactions, since any two-body interaction in configuration space, which is galilei- and translational-invariant and conserves parity is necessarily symmetric under exchange of particle coordinates. But from eq. (1), $S_5^{(1)}$ and $S_6^{(1)}$ are antisymmetric and must be combined with an antisymmetric operator in configuration space. Therefore an ALS interaction necessarily violates one of the above mentioned symmetries and cannot be present in the free NN interaction. The Brueckner G-matrix is defined by

$$G(E) = U - U \frac{Q}{H_0 - E} G(E)$$

where U denotes the free NN-interaction. U is clearly diagonal in the two-particle spin S . As it was pointed out by Kirson⁹⁾ the propagator $Q/(H_0 - E)$ may introduce ALS components in G . But if one uses an angle averaged Q and no

spin-orbit splitting, as it was done by Kuo and Brown, no ALS component can arise. Therefore ALS-components of the bare G-matrix of Kuo-Brown must arise from small numerical un-accuracies. In fact the ALS-components of the bare G-matrix-elements have been found to be negligible (see fig. 4). However those introduced through the second order correction terms are much smaller than ALS component of the ASDI matrix-elements. In addition Feldmeier and Manakos⁴⁾ have shown, that an enhancement of just this component of the Kuo-Brown matrixelements is required, to fit the spectrum of ^{24}Mg . This indicates, that another treatment of the Pauli operator or higher order terms might introduce ALS components of the order, shown in section 2. It is likely, that the already mentioned investigation of third order terms, calculated by Goode⁷⁾ for example, will provide a deeper insight. But we think, that also independently of microscopic theories further information on the non-central components of the effective sd-shell interaction is necessary. However using the matrixelements in jj basis as free fit parameters as it was done for the ASDI matrixelements, no separation of the different tensorparts can be achieved. Effects of different tensorparts can be mixed in this fit procedure. For example we noted in section 3 and 4, that non-central contributions can also be simulated by central interactions. The method to multiply the different tensorparts of the Kuo-Brown interaction by spin- and isospin-dependend parameters, used in ref. 4, is too restrictive. No definite statements about the correct tensorpart of the

effective sd-shell interaction can be made using the upper approaches. One way to clarify those questions is, to construct an explicit spacerepresentation for the effective tensorinteraction and to determine its matrixelements, which are then clearly separated from other interactions (e. g. central interaction), by fitting the data of various sd-shell nuclei. The same arguments apply also to the LS- and ALS-component. In a following paper we shall derive a method, to attack the above mentioned problem.

The discussion of the ASDI matrixelements in jj-basis has established a clear difference between diagonal and nondiagonal matrixelements for $T = 0$ states. But no other general conclusions can be drawn, using a jj-basis. Because of the importance of the central part a representation of two-particle matrixelements in $SU(3)$ -basis is more appropriate. The observed frequent cancellation of the noncentral components may be the reason that purely central interactions work in shell model calculations. Moreover in a phenomenological treatment of effective interactions effects of non-central components can be included in central forces. One has however to be careful, when only two-particle matrixelements are discussed, since finally observables (such as spectra, transition probabilities, etc.) really count. In this paper we have dealt with the latter point only on the one example ^{28}Si , using the ASDI matrixelements. Of course a more detailed analysis of sd-shell nuclei which is clearly beyond the scope of this paper and presently in preparation is necessary, to allow for definite conclusions.

References

- 1) Y. Akiyama, A. Arima and T. Sebe, Nucl. Phys. A 138
(1969) 273
- 2) P. Manakos, Z. Phys. 247 (1971) 127
- 3) D. Strottman and A. Arima, Nucl. Phys. A 162 (1971) 605
- 4) H. Feldmeier, P. Manakos and T. Wolff, Z. Phys. 258
(1973) 81
- 5) T. T. S. Kuo and G. E. Brown, Nucl. Phys. 85 (1966) 40
- 6) T. T. S. Kuo, Nucl. Phys. A 103 (1967) 71
- 7) P. Goode, Phys. Lett. 51 B (1974) 429
- 8) B. R. Barrett and M. W. Kirson, Nucl. Phys. A 148 (1970) 145
- 9) M. W. Kirson, Phys. Lett. 47 B (1973) 110
- 10) P. W. M. Glaudemans et al., preprint 1975, Utrecht
- 11) F. Meurders, P.W.M. Glaudemans, J.F.A. Van Hienen and
G.A. Timmer, Z. Phys. (1976) 113
- 12) J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A 245 (1958) 127
- 13) E. C. Halbert, J. B. McGrory, B. H. Wildenthal and
S. P. Pandya, Adv. Nucl. Phys., Vol. 4, 315
- 14) B. M. Freedom and B. H. Wildenthal, Phys. Rev. C 6
(1972) 1633
- 15) H. Feldmeier, thesis, Darmstadt (1974)
- 16) P. M. Endt and C. van der Leun, Nucl. Phys. A 214
(1973) 1
- 17) P. W. M. Glaudemans, B. J. Brussard, B. H. Wildenthal
Nucl. Phys. A 102 (1967) 593
- 18) B.R. Barrett, R.G.L. Hewitt and R.J. McCarthy, Phys. Rev.
C 3 (1971) 1137, Phys. Rev. C 2 (1970) 1199

ANHANG F

Analytische Darstellung der zentralen und nichtzentralen Komponenten der effektiven (sd)-Schalenwechselwirkung

Anmerkung

Dieser Teil der Arbeit ist - in Hinblick auf eine spätere Veröffentlichung - in sich abgeschlossen formuliert; dementsprechend enthält dieser Anhang ein eigenes Literaturverzeichnis sowie eigene Numerierung der Gleichungen, Figuren und Tabellen. Aus dem gleichen Grunde wurden die folgenden Ausführungen in Englisch formuliert.

Abstract

A method to construct an explicit analytic representation of the central- and noncentral interactions from a given set of matrixelements is derived and applied to a realistic model space. The analytic structure of the interactions, derived in this way, depends both on their tensorcharacter and the properties of the modelspace. For the central and tensor-component of the effective interaction separable interactions can be obtained by this method. Furthermore the $SU(3)$ -conserving and -breaking part of the central-force representation is easily detected. This technique is applied to the ASDI matrixelements for the s_d -shell.

1. Introduction

In a previous paper¹⁾ we found from an analysis of various realistic sets of sd-shell matrixelements, that the central parts of both microscopic and empirical effective interactions for the sd-shell agree rather well with each other and furthermore exhibit an approximate SU(3) symmetry. However strong deviations were observed for their noncentral components. For a more direct analytic formulation and for a better understanding of those results it is helpful to have an explicit space representation of those interactions which produce the various sets of matrixelements. Such a representation has the obvious advantage, that the contributions of the different tensorparts of the effective interaction can be studied separately and furthermore it might even be possible to extract directly some information about the symmetries of the whole many particle system (such as SU(3)-symmetry). Of course such a space representation of the force, derived from a finite set of matrixelements within a given modelspace cannot be unique. One can, however, make use of this ambiguity in order to find a particularly simple representation, which already contains those properties of the force, which are relevant for a description of nuclear structure in this model space.

In ref. 1 the general structure of an effective two particle interaction $V(1,2)$ was given by:

$$V(1,2) = \sum_{\nu=1}^6 \left[X_{\nu}^{(R)} \times S_{\nu}^{(R)} \right]^{\circ} \cdot \Pi_T$$

where $X_{\nu}^{(k)}$ and $S_{\nu}^{(k)}$ denote tensoroperators of rank k in configuration- and spinspace, respectively. A_T are isospin dependend strength parameters and can be expressed by the scalar unit operator and the scalarproduct $\tau_1 \cdot \tau_2$. The label ν serves for a further distinction of operators of the same rank k . For example with the convention of ref. 1 we have $S_1^{(0)} = 1$ and $S_2^{(0)} = \sigma_1 \cdot \sigma_2$. If we are concerned with the tensorpart of fixed rank k_0 of the effective interaction V , the choice for tensoroperators in spin- and configurationspace is limited ($k \leq 2$). As long as possible we assume them to be known from microscopic NN potentials. However, the radial dependence may be very different from that, known for the free NN interaction, and cannot be derived uniquely from a finite set of matrixelements. The technique, described in section 2 of this paper, determines the radial shape from the properties of the model-space, based on a discussion of the matrixelements in momentum space. It allows us to find out the most relevant Fourier components of both, the central and noncentral forces, which are contained in a given set of matrixelements, in order to arrive at a space representation, which is equivalent - when applied to realistic single particle wavefunction - to this matrixelements, at least to a reasonable approximation. The representation for the various tensorcomponents, derived in this paper, are characterized by their simple structure in momentum space, accounting only for a few but essential Fouriercomponents. However the same method may be used, to construct other equivalent forms of the radialdependences.

An application of the method to the tensorcomponents of the ASDI matrixelements¹⁾ which are known to give a good description of sd-shell nuclei in the region $A = 24 - 28^2)$, is described in section 3. We shall use harmonic oscillator wavefunctions, to calculate the matrixelements of the various interactions throughout this section.

In section 4, we show, that the $SU(3)$ invariant component of the central part can easily be understood, because it turns out, that a Quadrupole-Quadrupole interaction is part of the representation, derived in section 3 for the empirical ASDI matrixelements. The effect of $SU(3)$ -conserving and -breaking components of the effective sd-shell interaction is discussed for some examples of sd-shell nuclei.

2. Method

Consider any two-particle interaction $V_k(\underline{r})$ in configuration-space, which factorizes into a radialdependence $v_k(r)$ and some dependence on the angular coordinates of $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$. We assume, without loss of generality, that this angular part has a definite tensorcharacter, denoted by k . This means, it transforms according to the irreducible representation D^k of the orthogonal group. The two-particle transition-density $\sum_k X_{cd}^{ab}$ (a, b, c and d denote the single particle quantum numbers ($n_a, l_a, j_a, \dots$)) of the two-particle matrixelement $\langle j_a j_b J | V(\underline{r}) | j_c j_d J \rangle$ is defined by

$$\langle j_a j_b J | V(\underline{r}) | j_c j_d J \rangle = \int v_k(q) \sum_k X_{cd}^{ab}(q) q^2 dq \quad (1)$$

where $v_k(q)$ is defined as:

$$v_k(q) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty j_k(qr) v_k(r) r^2 dr \quad (2)$$

$v_k(r)$ is given in terms of $v_k(q)$ by

$$v_k(r) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty j_k(qr) v_k(q) q^2 dq \quad (2a)$$

The transition-density $\sum_k X_{cd}^{ab}(q)$ contains the whole information on the configurationspace and the tensor-character of $V(\underline{r})$, whereas $v(q)$ is determined by the radialdependence and the tensor-character of the two-particle interaction only. As already mentioned the spin-, isospin- and tensor-character of the forces are assumed to be known from microscopic NN

potentials; on the other hand the radial dependence cannot be determined unambiguously. However if we calculate the nuclear matrixelements of a limited configurationspace, the two-particle transition density $\sum_k X_{cd}^{ab}(q)$ turns out to be localized in momentum space. Therefore the two-particle transition density plays the role of a filterfunction, selecting some q -values, which are determined by the model-space and the tensorcharacter k . Using eq. (1) we can determine the Fouriercomponents $v_k(q)$ of $v_k(r)$ which are relevant for this modelspace. Therefore $v_k(q)$ of eq. (2) can be approximated by some simple functions of q . This observation enables us to derive an analytic expression for the radial-dependence $v_k(r)$, using eq. (2a). This general procedure, outlined above, will be further illustrated in the specific applications of the next section.

In the case of the sd-shell the method described above is applied to the central and tensorinteraction, which satisfy the assumptions, leading to eq. (1) and (2). A modification is necessary to deal with the LS interaction, because of its dependence on momentum coordinates.

3. Results

3.1 Central interaction

For central interactions the two-particle transition density has been discussed in detail by Knüpfer et al³⁾. It is shown in ref. 3, that - for a limited configurationspace - the scalar two-particle transition density is sufficiently localized in momentum space. For the sd-space it turns out that the location $\bar{q}$ of the maximum of the two-particle transition density $\int_0^1 X_{cd}^{ab}$ of eq. (1) is related to the nuclear radius R by the following equation³⁾

$$\bar{q} = \frac{z_2}{2R} (\pm 10\%) \quad (3)$$

where the nuclear radius is given by

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (r_0 = 1.2 \text{ fm}) \quad (4)$$

Here z_2 denotes the first zero of the Besselfunction $j_2(x)$ with $j_2(z_2) = 0$. Taking into account only the most important Fouriercomponent of $v(r)$, i. e. approximating the Fourier transform $v(q)$ of eq. (2) by a delta function at $q = \bar{q}$, we arrive at a simple representation of a central force $V_c(r)$ (c. f. eq. (2a)):

$$V_c(r) = V_0 \cdot j_0(\bar{q}r) \quad (5)$$

As also shown in ref. 3 this ansatz for a central interaction is equivalent to other interactions currently in use. Note that $V_c(r)$ is a separable interaction (c. f. eq. (31) of section 4). In the following we choose to parametrize the

spin and isospin dependence of the scalar interaction in the following way:

$$V_C(1,2) = [A_T + B_T (\sigma_1 \cdot \sigma_2)] j_0(\bar{q}r) + C_T (\tau_1 \cdot \tau_2) \quad (6)$$

Here like in the MSDI parametrization of ref. 4 the $(\tau_1 \cdot \tau_2)$ term of eq. (6) has been included to allow for the correction of binding energies and of the spacing of levels with $T = T_Z$ and $T > T_Z$ respectively. It has however no influence on the relative position of the low lying excited states.

We calculated the two-body matrixelements of the interaction of eq. (6) and determined the isospin-dependent parameters A_T , B_T and C_T by least squares fit to the central part of ASDI. In principle the parameter $\bar{q}$ is given by eq. (3); for $A = 24$ the corresponding value is obtained to be:

$$\bar{q} = 0.85 \text{ (} \pm 10 \% \text{) (fm}^{-1}\text{)} \quad (7)$$

It is however instructive to vary also $\bar{q}$. The best fit is then obtained for $\bar{q} = 0.9 \text{ (fm}^{-1}\text{)}$, which in fact nearly coincides with the above value of eq. (7). The parameters of eq. (6) are given by

$$T = 0: \quad A_0 = -15.45 \text{ MeV, } B_0 = -2.71 \text{ MeV, } C_0 = 0.729 \text{ MeV}$$

$$T = 1: \quad A_1 = -9.51 \text{ MeV, } B_1 = 5.52 \text{ MeV, } C_1 = 0.724 \text{ MeV}$$

The central interaction of eq. (6) can be rewritten as:

$$V_C(r) = j_0(\bar{q}r) \{ a_0 + a_1 (\tau_1 \cdot \tau_2) + a_2 (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + a_3 (\sigma_1 \cdot \sigma_2) (\tau_1 \cdot \tau_2) \} + C_T \tau_1 \cdot \tau_2 \quad (8)$$

where the parameters $a_0, \dots, a_3$ are related to A_T and B_T .

For the values of the latter, given above, we obtain:

$$a_0 = -11.00 \text{ MeV}, a_1 = 1.49 \text{ MeV}, a_2 = 3.46 \text{ MeV}, a_3 = 2.06 \text{ MeV}$$

For later purpose we note, that the spin- and isospin-independent part of $V_c(r)$ of eq. (8) dominates.

In fig. 1 the matrixelements, resulting from eq. (6) are compared with the central part of the ASDI matrixelements. Obviously the ASDI matrixelements can be reproduced quite well by the force of eq. (6). This representation of the central operator, contained in the ASDI matrixelements, has some interesting features, discussed in the next section. Only properties of the sd-shell configuration space have been used to obtain the analytic structure of $V(r)$, whereas the parameters are of course specific for the central part of the ASDI matrixelements. The value $\bar{q}$ of $V(r)$ shows clearly the long range behaviour of the central part of the effective interaction.

3.2 Tensor interaction

The term $[X_4^2 \times S_4^2]^0$, defined in eq. (1) of ref. 1, is a tensor of rank 2 in configuration and spinspace respectively. In analogy to a microscopic description of the NN-interaction by meson-exchange potentials we adopt the following form for the tensorinteraction:

$$V_t(\underline{x}) = v_t(r) \cdot S_{12}(\hat{\underline{x}}) \quad (9)$$

where $v_t(r)$ depends only on the relative distance r and its form is yet undetermined. Note that $V_t(\underline{x})$ satisfies the conditions, which led us to eq. (1). We shall discuss the most simple form of $v_t(r)$ later. $S_{12}(\hat{\underline{x}})$ is given by:

$$S_{12}(\hat{\underline{x}}) = \frac{(\underline{s}_1 \cdot \underline{x})(\underline{s}_2 \cdot \underline{x})}{r^2} - \frac{1}{3}(\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2) \quad (10)$$

or in form exhibiting its tensorcharacter more clearly:

$$S_{12}(\hat{\underline{x}}) = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \left[\chi_2(\hat{\underline{x}}) \times [\underline{s}_1 \times \underline{s}_2]^2 \right]^0 \quad (11)$$

The fouriertransform of $V_t(\underline{x})$ can be written as:

$$V_t(q) = -v_t(q) \cdot S_{12}(\hat{q}) \quad (12)$$

with $S_{12}(\hat{q})$ defined analogously to eq. (11) and

$$v_t(q) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty j_2(qr) v_t(r) r^2 dr \quad (13)$$

(compare eq. (2)). Expressing $V_t(\underline{x})$ by its Fouriertransform yields:

$$V_t(\underline{x}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\int_0^\infty j_2(qr) v_t(q) q^2 dq \right] S_{12}(\hat{\underline{x}}) \quad (14)$$

Using eq. (42) of ref. (4) we finally have:

$$V_t(\underline{x}) = \left(\frac{64\pi}{3}\right)^{1/2} \int dq q^2 U_t(q) \sum_{t_1, t_2} j_{t_1}(qr_1) j_{t_2}(qr_2) \quad (15)$$

$$\times \hat{t}_1 \hat{t}_2 \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{1/2(t_1-t_2+2)}$$

$$\times \left[\left[Y_{t_1}(\hat{r}_1) \times Y_{t_2}(\hat{r}_2) \right]^2 \times \left[\underline{s}_1 \times \underline{s}_2 \right]^2 \right]^0$$

In this way we separated the dependence of $V_t(\underline{x})$ on the coordinates of particle 1 and 2. As it is shown below, the additional integration over q can be simplified considerably, by making use of the properties of the two-body transition density. One advantage of this separation is that the transformation to relative and CM coordinates is no longer necessary to calculate the matrixelements of eq. (15). They are given by:

$$\langle n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2, J T | V_t(\underline{x}) | n_3 l_3 j_3, n_4 l_4 j_4, J T \rangle \quad (16)$$

$$= 135 \cdot (1/3\pi)^{1/2} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{j}_4 (-1)^{l_1+l_2} \int \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4$$

$$\times \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \sum_{L, L', t_1, t_2} (\hat{L} \hat{L}' \hat{t}_1 \hat{t}_2)^2$$

$$\times \begin{Bmatrix} l_1 & 1/2 & j_1 \\ l_2 & 1/2 & j_2 \\ L & 1 & J \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l_3 & 1/2 & j_3 \\ l_4 & 1/2 & j_4 \\ L' & 1 & J \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L & 1 & J \\ L' & 1 & J \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$x (-1)^{\frac{1}{2}(t_1 - t_2 + 2)} \begin{pmatrix} l_1 & t_1 & l_3 \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & t_2 & l_4 \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & 2 \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & L \\ l_3 & l_4 & L' \\ t_1 & t_2 & 2 \end{matrix} \right\}$$

$$\times \int dq q^2 U_t(q) \langle n_1 l_1 | j_{t_1}(q r_1) | n_3 l_3 \rangle \langle n_2 l_2 | j_{t_2}(q r_2) | n_4 l_4 \rangle$$

The radial parts of the two-particle transition density

$$t_1 t_2 \prod_{n_1 l_1, n_2 l_2}^{n_3 l_3, n_4 l_4} (q) = \langle n_1 l_1 | j_{t_1}(q r_1) | n_3 l_3 \rangle \quad (17)$$

$$\times \langle n_2 l_2 | j_{t_2}(q r_2) | n_4 l_4 \rangle$$

(compare eq. (1)) were calculated as functions of q . Their typical behaviour is shown for some values of the quantum-numbers $n_1, l_1, n_2, l_2, n_3, l_3, n_4, l_4, t_1, t_2$ in fig. 2. Note that the possible values of t_1 and t_2 are strongly restricted by the sd-modelspace, the most important ones being $(t_1, t_2) = (2, 0)$ and $(2, 2)$, respectively. The position of the extrema of $I(q)$ depends only very weakly on the single-particle quantumnumbers and is dominated by the values of t_1 and t_2 respectively. It is immediately seen, that only those Fourier-components of the tensorforce of eq. (15) really contribute to the matrixelement of eq. (16), which are localized around the extrema of $I(q)$. As mentioned at the beginning from a microscopic meson exchange potential a modified Yukawa shape

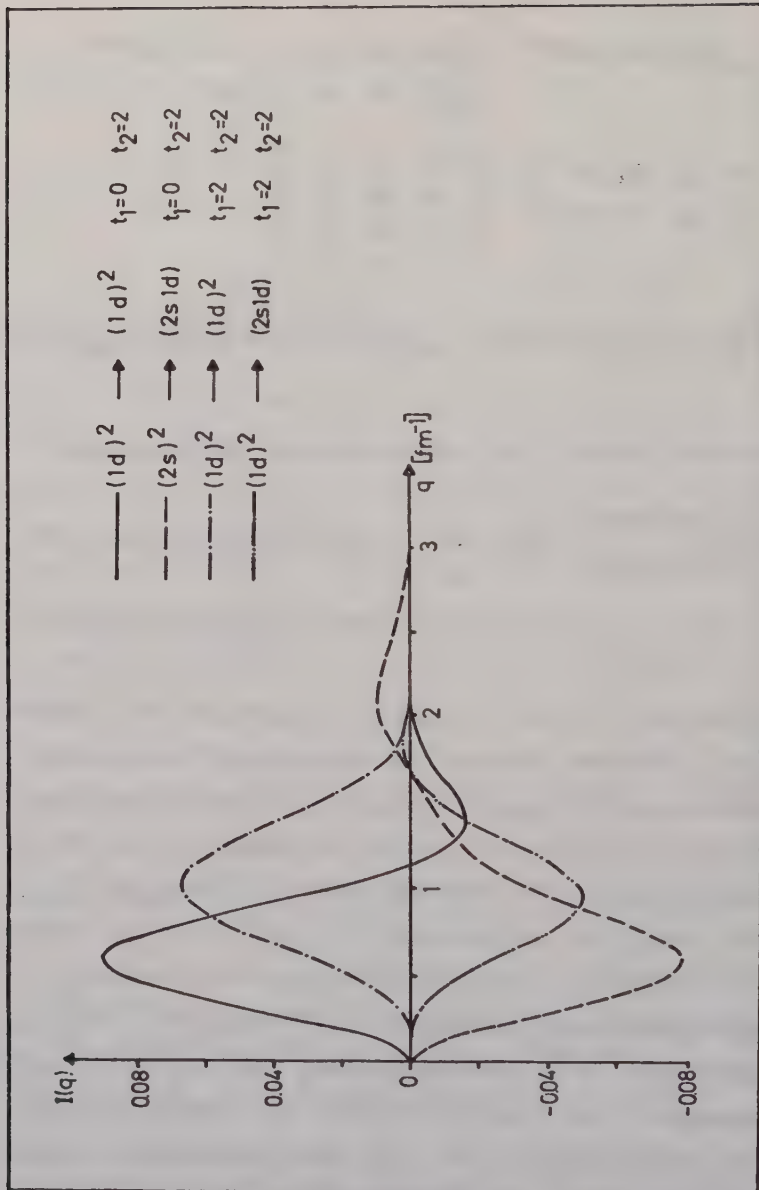


Fig. 2: Dependence of the radial part of the two-particle transition density $I_{\substack{t_1 t_2 \\ n_1 l_1, n_2 l_2}}^{\substack{n_3 l_3, n_4 l_4}}(q)$ of eq. (17) on q .

for $v_t(r)$ is required. However on account of the fact, that we deal with an effective tensorinteraction, $v_t(r)$ can be quite different. Because of our discussions we can use a schematic radial dependence, which has nonvanishing Fourier-components at the extrema of $I(q)$ only, and reflects properties of the configuration space. Any other radial dependence must be equivalent to the above one by validity of eq. (1).

From fig. 2 we see, that there are at least two such Fourier-components located at $q_1 = 0.6 \text{ fm}^{-1}$ and $q_2 = 1.0 \text{ fm}^{-1}$. As a first approximation let us take only one, that means

$$V_t(q) = (\pi/2)^{1/2} V_0(\tau) \frac{\delta(q - \bar{q})}{q\bar{q}} \quad (18)$$

with corresponds to (see eq. (9) and eq. (14)):

$$v_t(r) = V_0(\tau) j_2(\bar{q}r) \quad (19)$$

Treating $\bar{q}$ as free parameter, we obtain a best fit to the tensor part of ASDI for the value $\bar{q} = 1.1 \text{ fm}^{-1}$. From this result we conclude that the higher Fouriercomponent q_2 is the dominant one. From the above considerations and fig. 2 an ansatz including two Fouriercomponents is expected to give even better agreement, which in analogy to eqs. (18) and (19) yields:

$$v_t(r) = V_1(\tau) j_2(\bar{q}_1 r) + V_2(\tau) j_2(\bar{q}_2 r) \quad (20)$$

If one varies $\bar{q}_1$ and $\bar{q}_2$ freely, the ASDI tensormatrixelements are best reproduced for $\bar{q}_1 = 0.6 \text{ fm}^{-1}$ and $\bar{q}_2 = 1.0 \text{ fm}^{-1}$ which agree well with the values q_1, q_2 found through the analysis of $I(q)$. The tensorforce of eq. (14) is now

given by:

$$V_t(\underline{r}) = [V_1(T)j_2(\bar{q}_1 r) + V_2(T)j_2(\bar{q}_2 r)] S_{12}(\hat{r}) \quad (21)$$

The matrixelements calculated from eq. (21) are compared to the tensorpart of the ASDI matrixelements in fig. 3. The parameters $V_1(T)$ and $V_2(T)$ of eq. (21) are adjusted, in order to give the best fit (their values are $V_1 = 45.01$, $V_2 = -107.65$ for $T = 0$ and $V_1 = -1.4$, $V_2 = -66.4$ for $T = 1$, respectively in units of MeV). It turns out, that the component $\bar{q}_2$ is much stronger weighted than the lower $\bar{q}_1$, as it is expected from the previous result.

The overall agreement is rather satisfactory, though some of the very large matrixelements of the ASDI tensorpart cannot be completely reproduced. In fig. 3 we indicated those matrixelements by arrows, which are sensitive to even higher Fouriercomponents around $q = 2 \text{ fm}^{-1}$ which are not included in eq. (21). There is some evidence for the contribution of higher Fourier-components following from the structure of $I(q)$ for the values $t_1 = t_2 = 4$.

3.3 LS-interaction

An operator of this type is also well known from microscopic exchange potentials and is given by $\underline{L} \cdot \underline{S}$, where L denotes the relative angular momentum of the two particles. Within one oscillator shell, the operator L is equivalent to the orbital angular momentum $\underline{L}_{12} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$ of the two particles.

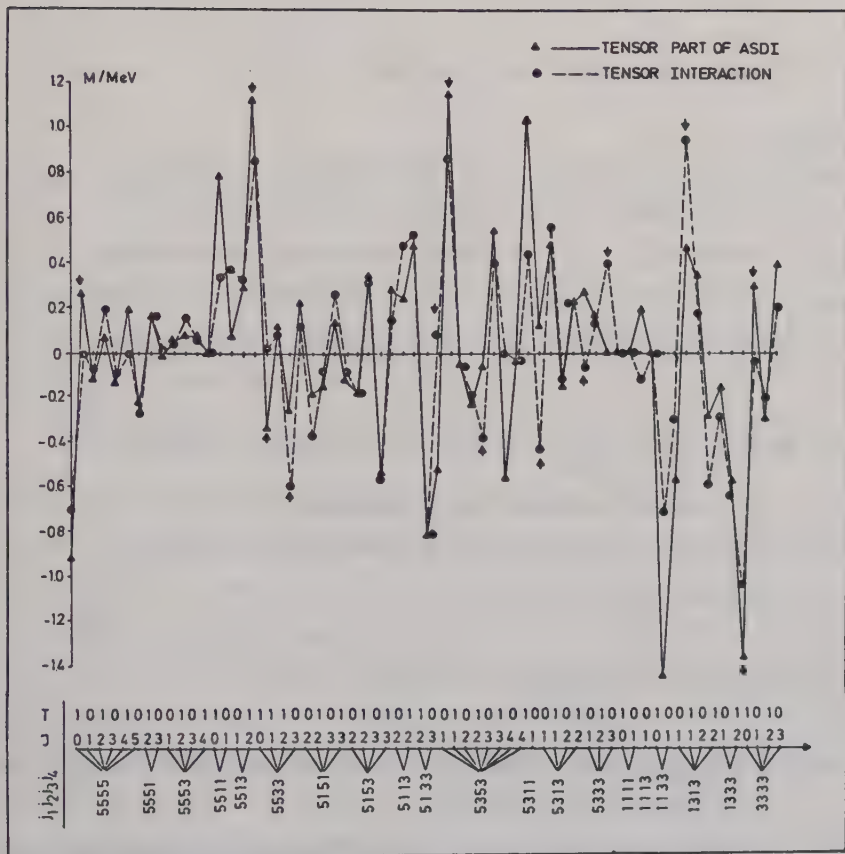


Fig. 3: The tensorpart of the ASDI matrixelements¹⁾ is compared with the matrixelements of the tensor-interaction of eq. (21). Notation as in fig. 1.

However to maintain generality we choose the following ansatz:

$$V_{LS}(r_{12}) = v_{LS}(r_{12}) \left(\underline{L} \cdot \underline{S} \right) \quad (22)$$

with $\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$.

In analogy to the treatment of the tensorforce we simplify the radial dependence by an analysis of the two-particle matrixelement in q-space. In order to calculate the matrixelements of eq. (22) we use harmonic oscillator wavefunctions and Moshinsky-transformationsbrackets, symbolically written as:

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \lambda\rangle = \sum_{n l N L} \langle n l N L; \lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \lambda \rangle |n l N L; \lambda\rangle \quad (23)$$

where n, l refer to relative quantumnumbers, N, L to CM-quantumnumbers in the usual way. With the help of eq. (23) the matrixelements are given by:

(24)

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2 j_T | V_{LS}(r_{12}) | j_3 j_4 j_T \rangle \\ &= (-1)^{j+1} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{j}_4 \sum_S (-1)^S (\hat{S})^2 [S(S+1)(2S+1)]^{1/2} \delta_{S,1} \\ & \sum_{\lambda, \lambda'} (\hat{\lambda})^2 (\hat{\lambda}')^2 \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & j_1 \\ l_2 & l_2 & j_2 \\ \lambda & S & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_3 & l_2 & j_3 \\ l_4 & l_2 & j_4 \\ \lambda' & S & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda & S & j \\ S & \lambda' & 1 \end{matrix} \right\} \\ & \sum_{n l N L (n')} [l(l+1)(2l+1)]^{1/2} (-1)^{L+l} \left\{ \begin{matrix} l & \lambda & L \\ \lambda' & l & 1 \end{matrix} \right\} \langle n l N L; \lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \lambda \rangle \\ & \langle n' l' N L; \lambda' | n_3 l_3 n_4 l_4; \lambda' \rangle \langle n l | v_{LS}(\sqrt{2} r) | n' l \rangle \end{aligned}$$

with $r = \frac{1}{\sqrt{2}} |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$. Inspection of the possible Moshinsky-brackets for the sd-shell shows, that only $n = n'$ is possible and expressing $v_{LS}(\sqrt{2} r)$ by its Fouriertransform $v_{LS}(q)$ we obtain:

$$\langle n\ell | v_{LS}(\sqrt{2} r) | n\ell \rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty v_{LS}(q) q^2 \langle n\ell | j_0(\sqrt{2} qr) | n\ell \rangle dq \quad (25)$$

It is immediately seen from eq. (24), that $\ell = 0$ does not contribute to the matrixelement of V_{LS} ; consequently such parts can be excluded from further considerations. The next step is to investigate the q -dependence of:

$$T_{n\ell}(q) = q^2 \langle n\ell | j_0(\sqrt{2} qr) | n\ell \rangle$$

Since a LS-term in NN-potentials appears only through the exchange of mesons heavier than the pion (for example the ρ -mesons) we suppose that also the effective LS-interaction is of shorter range compared to scalar or tensorinteractions. This is however an assumption which turns out to be true in the following. Therefore we expect, that states of low relative angular momentum are important, the lowest possible value of l is $l = 1$ ($n = 0, 1$). The corresponding $T(q)$ has extrema at the values $q = 1.5$ and 2.1 fm^{-1} respectively so that at least those values must be considered in the construction of $v_{LS}(r_{12})$. We restrict our ansatz to two Fourier-components i. e. we use

$$v_{LS}(q) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left[V_1(T) \frac{\delta(q - \bar{q}_1)}{q \bar{q}_1} + V_2(T) \frac{\delta(q - \bar{q}_2)}{q \bar{q}_2} \right] \quad (26)$$

corresponding to a radial dependence

$$V_{LS}(r_{12}) = V_1(T) j_0(\bar{q}_1 r_{12}) + V_2(T) j_0(\bar{q}_2 r_{12}) \quad (27)$$

We calculated the matrixelements of this LS-interaction (eqs. (27) and (22)) and obtained the best agreement with the LS-part of ASDI for the values $\bar{q}_1 = 1.6 \text{ fm}^{-1}$ and $\bar{q}_2 = 2.0 \text{ fm}^{-1}$. We emphasize, that in fitting the LS matrixelements of ASDI no restrictions on $\bar{q}_1$ and $\bar{q}_2$ have been imposed. We see, that the two extrema of $T(q)$ for $l = 1$ are responsible for this values $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$, but there is also a tendency to include the extremum of $T(q)$ for $l = 2$ at $q = 1.8 \text{ fm}^{-1}$. The parameters $V_1(T)$ and $V_2(T)$ are found to be:

$$V_1 = -10.14 \text{ MeV}, V_2 = 65.5 \text{ MeV for } T = 0$$

$$V_1 = -19.46 \text{ MeV}, V_2 = 18.2 \text{ MeV for } T = 1$$

The LS-part of ASDI and the matrixelements calculated with the present interaction are compared in fig. 4. The agreement though not perfect, indicates that the LS-interaction given in eq. (27) and eq. (22), describes the LS-part of the ASDI matrixelements rather satisfactorily. The surprisingly high Fouriercomponents reflect the expected short range nature of the effective LS-interaction. In other words, this feature of the free LS-interaction can also be dedected in the effective shell-model interaction.

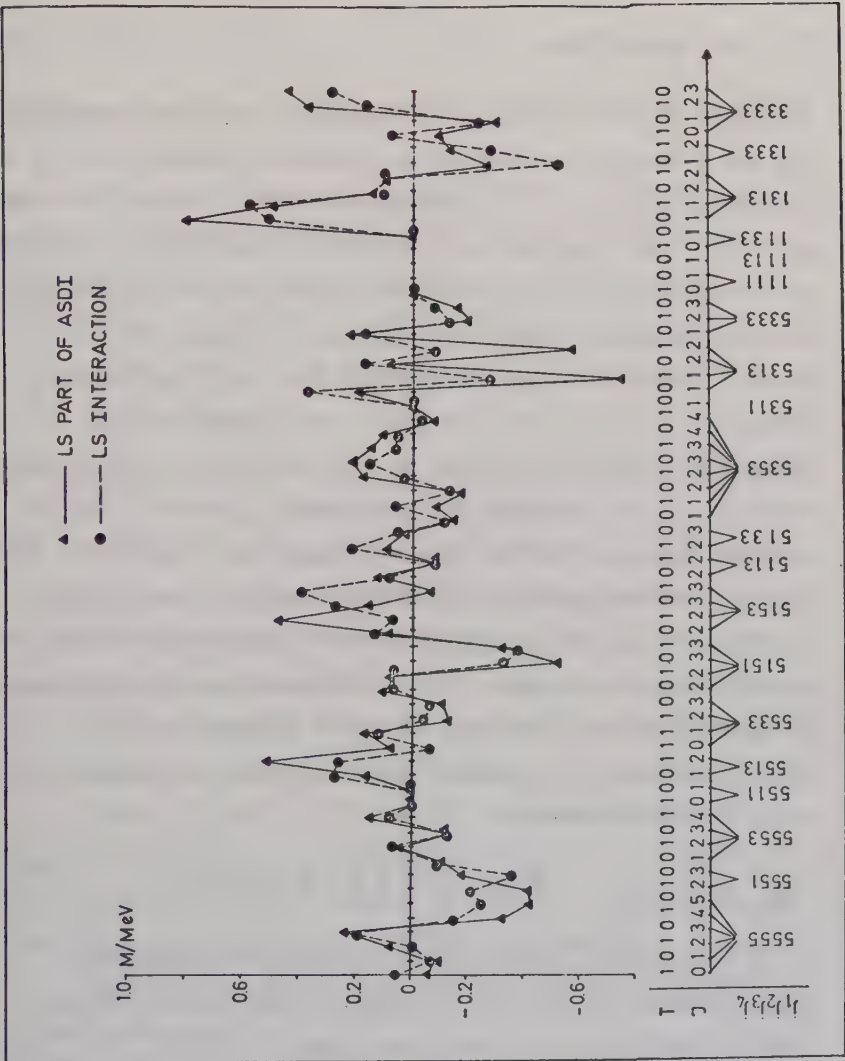


Fig. 4: The LS-part of the ASDI matrixelements¹⁾ is compared with the matrixelements of the LS-interaction of eq. (22) and eq. (27). Notation as in fig. 1.

3.4 ALS-interaction

This part of the effective interaction is the most surprising one and a specific feature of the effective interaction, as it was discussed in ref. 1. In addition to the reasons, mentioned in ref. 1, the violation of translational invariance, inherent to the shell model, may be another source for the appearance of ALS-components. Because there cannot be any ad hoc idea for the structure of an ALS operator from the free NN-interaction our concept, used for the scalar, tensor and LS interaction cannot be applied in this case. Since the ALS-part turns out to be important for experimental spectra¹⁾ and in order to complete our analysis, we construct an operator, which exhibits the properties of an ALS-operator and has a simple representation. But we emphasize, that besides its feature to produce an ALS component, there is no theoretical justification for using just this operator. A simple operator of rank 1 in configuration space satisfying galilei-invariance and parity-conservation is given by:

$$V_{ALS}(x_1, x_2) = f(r) [\chi_2(\hat{x}_1) \times \chi_2(\hat{x}_2)]^1 \quad (28)$$

It is easily seen, that V_{ALS} of eq. (28) is antisymmetric under exchange of particle coordinates and violates translational invariance, as required. Using

$$f(r) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^\infty v(q) j_0(qr) q^2 dq \quad (28a)$$

$$v(q) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^\infty f(r) j_0(qr) r^2 dr \quad (28b)$$

we obtain

$$V_{ALS}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} dq q^2 U(q) j_0(qr) \left[\chi_2(\hat{\underline{r}}_1) \times \chi_2(\hat{\underline{r}}_2) \right]^1 \quad (29)$$

As we know from previous sections it should be reasonable to take the radial dependence as $j_0(\bar{q} \cdot r)$ and to adjust $\bar{q}$ appropriately. From the two possible spinoperators $S_5^{(1)}$ and $S_6^{(1)}$ of ref. 1 we prefer the former. The ansatz for an interaction which yields pure ALS-contributions is then given by:

$$V_{ALS}(1,2) = V_0(r) j_0(\bar{q}r) \left[\left[\chi_2(\hat{\underline{r}}_1) \times \chi_2(\hat{\underline{r}}_2) \right]^1 \times \left[\underline{S}_1 \times \underline{S}_2 \right]^1 \right]^0 \quad (30)$$

The fact that it produces pure ALS-contributions was tested in running a tensor analysis for the matrixelements of V_{ALS} . The matrixelements of the ALS-operator of eq. (30) are used to fit the ALS-part of ASDI and the results are compared in fig. 5. A value of $\bar{q} = 0.7 \text{ fm}^{-1}$ was used. The reproduction of the ALS-part of ASDI with the ansatz (30) is seen to be not so satisfactory, as for the other tensor components, the large deviations occuring frequently in $T = 0$ states. Nevertheless eq. (30) is useful to get some idea of the structure of an operator, producing ALS-components of the two-particle interaction through the violation of translational invariance.

4. SU(3) invariance of the central interaction

In ref. 1 we found out, that the central component of the effective sd-shell interaction preserves an approximate SU(3) symmetry. This result can easily be explained if one uses the representation of the central force, given in eq. (6) of section 3.1. From the values of the parameters $a_0, \dots, a_3$ in eq. (8) follows, that the spin- and isospin-independent part of this central interaction dominates and only this part will be discussed below. Because of the expansion⁵⁾

$$j_0(\bar{q} r_{ik}) = 4\pi \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \hat{\lambda} j_{\lambda}(\bar{q} r_i) j_{\lambda}(\bar{q} r_k) [\chi_{\lambda}(\hat{r}_i) \times \chi_{\lambda}(\hat{r}_k)]^0 \quad (31)$$

further restrictions on the central force can be found. For the sd-shell only the multipolarities $\lambda = 0, 2$ and 4 contribute to the matrixelements, because of parity- and angular momentum selection rules. Introducing the notation:

$$\bar{\alpha}_{\lambda\mu} = \sum_i j_{\lambda}(\bar{q} r_i) \chi_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) \quad (32)$$

we can write:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_0 \sum_{i \neq k} j_0(\bar{q} r_{ik}) &= 2\pi a_0 \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \hat{\lambda} [\bar{\alpha}_{\lambda} \times \bar{\alpha}_{\lambda}]^0 \\ &- 2\pi a_0 \sum_{i, \lambda} (-1)^{\lambda} \hat{\lambda} (j_{\lambda}(\bar{q} r_i))^2 [\chi_{\lambda}(\hat{r}_i) \times \chi_{\lambda}(\hat{r}_i)]^0 \end{aligned} \quad (33)$$

Furthermore the $\lambda = 2$ term of eq. (31) is the most important one for sd-shell calculations. Therefore from the central interaction, given in eq. (8), an operator of the following form can be extracted:

$$\bar{\mathcal{C}}_2 = 2\pi a_0 \sqrt{5} [\bar{\alpha}_2 \times \bar{\alpha}_2]^0 \quad (34)$$

This operator $\bar{\mathcal{C}}_2$ can be regarded as an approximation to the central force of eq. (8). Note however, that $\bar{\mathcal{C}}_2$ contains also terms with $i = k$, if $\alpha_{2\mu}$ of eq. (32) is inserted. Those terms are single particle operators and using the approximation, given below, we see, that they are proportional to r^4 and can be considered as a modification of the single particle potential H_0 . The asymptotic behaviour of the Bessel-function at the origin

$$j_2(x) = \frac{1}{5!!} x^2 \quad (35)$$

leads to

$$\bar{\alpha}_{2\mu} \approx \alpha_{2\mu} = \frac{1}{15} \bar{q}^2 \sum_i r_i^2 Y_{2\mu}(\hat{r}_i) \quad (36)$$

and

$$\bar{\mathcal{C}}_2 \approx \mathcal{C}_2 = 2\pi a_0 \sqrt{5} [\alpha_2 \times \alpha_2]^0 \quad (37)$$

Representing H_0 by a harmonic oscillator potential and confining to one oscillator-shell,^{+) a SU(3)-invariant Quadrupol-Quadrupol interaction is given by⁶⁾}

$$Q^2 = \sum_m (-1)^m Q_m Q_{-m} \quad (38)$$

where

$$Q_m = -\frac{1}{b^2} \sum_i \left(\frac{8\pi}{15}\right)^{1/2} r_i^2 Y_{2m}(\hat{r}_i) \quad (39)$$

and b denotes the oscillatorparameter (note that in the corresponding formula (6.34) of ref. 6 a factor $-1/2$ is

+) This is a necessary condition for the identities of eq.(39) and eq. (40).

missing). Q^2 can be expressed by the quadratic Casimir-operator G of the $SU(3)$ group, the angular momentum operator L and H_0 in the following way:

$$Q^2 = G - \frac{1}{2} L^2 - \frac{1}{3} H_0^2 \quad (40)$$

G , L^2 and H_0^2 are of course diagonal in a basis, which is classified according to the group-chain $SU(3) \supset SO(3)$.

Denoting the representations of the $SU(3)$ group by $(\lambda\mu)$, the well known formula⁶⁾ for the eigenvalues $E(\lambda,\mu,L)$ of Q^2 is:

$$E(\lambda,\mu,L) = \frac{2}{3} \{ \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda+\mu) \} - \frac{1}{2} L(L+1) \quad (41)$$

From a comparison of eq. (36), (37), (38) and (39) we obtain:

$$e_2 = \frac{\bar{a}^4 b^4}{60} a_0 Q^2 := A Q^2 \quad (42)$$

That means, the operator e_2 extracted from the central force of eq. (8), is a $SU(3)$ invariant.

Of course, the approximations, made from eqs. (31) to (37), lead at least to a renormalization of the forceparameter a_0 . For example the matrixelements $\langle N1 | j_2(\bar{q}r) | N1 \rangle$ and $\langle N1 | (\bar{q}r)^2 | N1 \rangle / 15$ (with $N = 2, 1 = 0, 2$) are approximately proportional by a factor of about 2. Therefore we expect, that a_0 is reduced by a factor of 4 leading to a value of -2.75 MeV. Of course, the neglect of the multipolarities $\lambda = 0$ and $\lambda=4$, the spin- and isospin dependent parts of eq.(8) and the additional single particle contributions of e_2 further distinguish the central interaction, given in section 3.1,

from the pure SU(3)-invariant QQ-interaction.

Actual applications of QQ interaction of eq. (42) to sd-shell nuclei show, that a value of $a_0 = -3$ MeV is suitable, to fit the spectra within the pure SU(3)-model. Using $\bar{q} = 0.9 \text{ fm}^{-1}$, $b^2 = \hbar/m\omega$ and $\hbar\omega = 41 \text{ A}^{-1/3} \text{ MeV}$, we arrive at a strength-parameter of the QQ interaction of $A = -0.283$ MeV. A similar value of $A = -0.317$ has been used by Harvey⁷⁾, studying several sd-shell nuclei within the SU(3)-model.

From the representation of the central force by eq. (8) and from the above consideration, the approximate SU(3) symmetry, of the central part of the effective sd-shell interaction¹⁾, is obvious. Of course the parameters in eq. (8) are specific for the central component of the ASDI matrixelements. However, as expected from fig. 1 of ref. 1, the SU(3) diagonal matrixelements of the central part of the Kuo-Brown interaction, are also well approximated by the QQ interaction. To illustrate the above considerations on SU(3)-symmetry and the effect of SU(3)-breaking components, we investigate some sd-shell nuclei within the pure SU(3)-model. For this purpose we complement the QQ interaction of eq. (42), by an infinite range Majorana-, Heisenberg- and Bartlett-exchange potential of the form:

$$\begin{aligned}
 V_{ex} &= \sum_{i < k} (\sigma_i \cdot \sigma_k) (\tau_i \cdot \tau_k) \\
 &= - \sum_{i < k} (4 \tau_{ik}^T + 2 \tau_{ik}^S + 2 \tau_{ik}^T - 1)
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

The $P_{ik}^{\tau, \sigma, \tau_3}$ denote exchange operators for orbital-, spin- and isospin coordinates. V_{ex} is clearly diagonal in a $SU(3)$ -basis, which can be further classified by definite orbital- and spin- and isospin-symmetry. Its eigenvalues⁸⁾ may be expressed by the partitionnumbers $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, characterising the corresponding Young-diagrams for orbital ($k \leq 4$), spin- ($k \leq 2$) and isospin- ($k \leq 2$) symmetry. This exchange potential serves to split up the different orbital symmetry classes, which are possible for many particle $(sd)^n$ -configurations. V_{ex} may be regarded to replace the spin- and isospin dependent terms of eq. (8). As a result of the addition of V_{ex} to $\mathcal{E}^2$, states of the highest symmetry-class are preferred energetically.

From the foregoing discussions it should be clear, that the modelinteraction

$$V_{mod} = A Q^2 + B V_{ex} \quad (44)$$

is diagonal for $(sd)^n$ states, which are classified by the group chain $SU(24) \supset SU(6) \times SU(4)$, $SU(6) \supset SU(3) \supset SO(3)$. The spectra of some sd-shell nuclei, calculated with V_{mod} , are presented in fig. 6 to fig. 8. The values of the parameters A and B used, are indicated (in units to MeV). For the $SU(3)$ -spectra the states are labelled by orbital symmetry $\{f\}$, $SU(3)$ quantumnumbers $(\lambda\mu)$, Elliott's projection number K ¹¹⁾ and total angular momentum J ($J = L$ in all cases of highest orbital symmetry, shown in the figures). The experimental spectra are taken from ref. 9 and the band assignments from

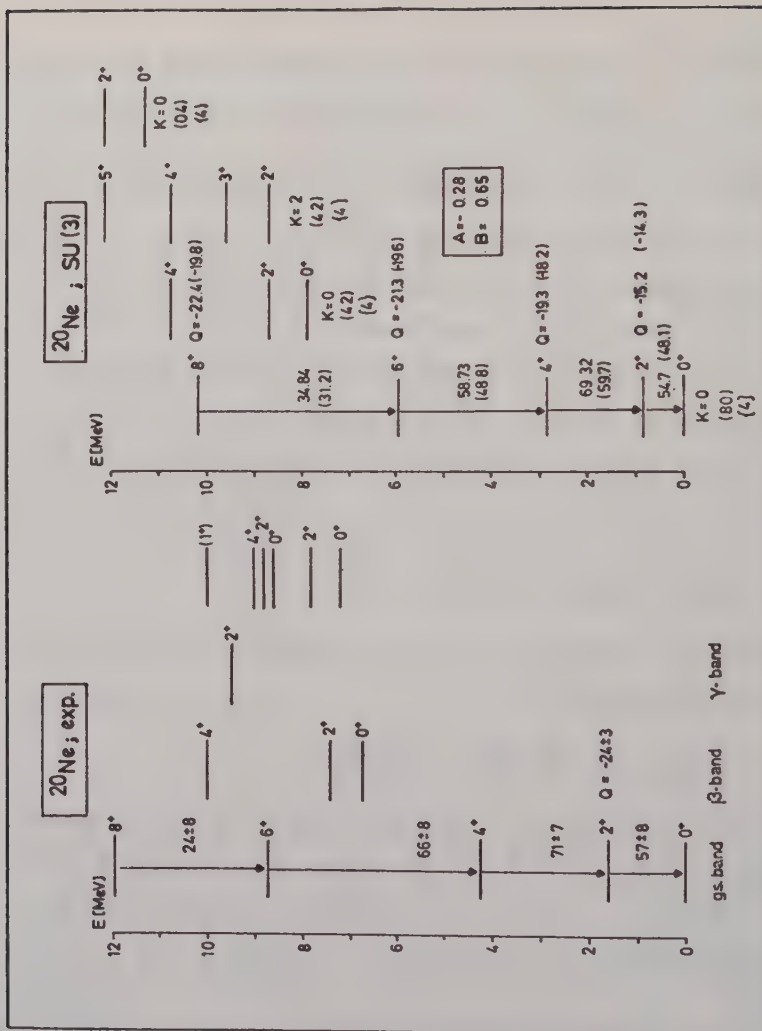


Fig. 6: Experimental and SU(3)-spectrum of ^{20}Ne . The numbers along the vertical arrows give the $B(E2)$ value for the corresponding transition in units of $e^2\text{fm}^4$. The quadrupole moments Q of the members of the ground state band are given in units of efm^2 . Numbers without parenthesis correspond to SU(3)-values, numbers in parenthesis are results of a shell-model calculation with Kuo-matrix-elements¹²⁾. As in fig. 7 and fig. 8 only states of positive parity are shown.

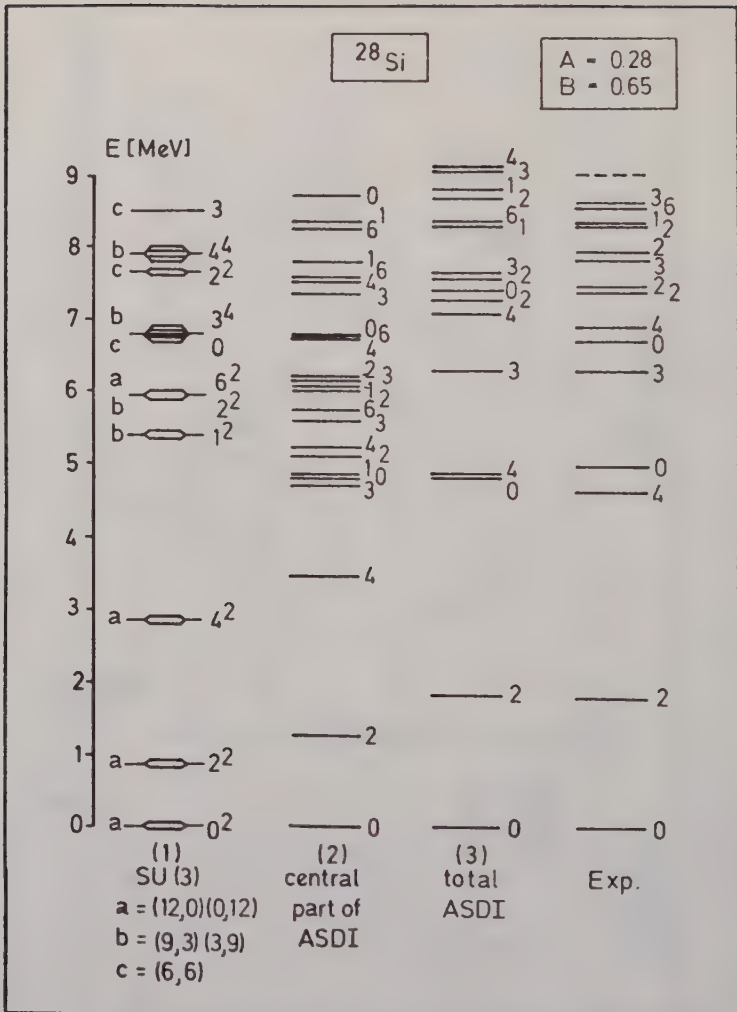


Fig. 8: Spectrum of ^{28}Si : (1) = for the QQ-interaction of eq. (44). The degeneracy of the states is exhibited explicitly. (2) = for the central part of the ASDI-matrixelements; (3) = for the total ASDI matrix-elements, including the noncentral components.

ref. 10, 14. We do not intend a complete discussions of all aspects, which is clearly beyond the scope of this paper and only show some general trends. As seen from fig. 6, the spectrum of ^{20}Ne can be reproduced quite well by the $\text{SU}(3)$ invariant QQ-force. Especially the grouping of states into rotational bands is clearly exhibited in the "Elliott bands" of the $\text{SU}(3)$ -spectrum.⁺) Moreover the $B(E2)$ values for transitions within the ground-state band and the quadrupole moments, which are also given in fig. 6, are in good agreement with experiment^{15,16,17)}, indicating, that at least the states of the ground state band are to a high degree identical to pure $\text{SU}(3)$ states (to calculate the $B(E2)$ values and quadrupole moments we used the algebraic formulae given in ref. 11 and an effective charge of 0.5 e for both, protons and neutrons). The results of a shell-model calculation, using the Kuo effective interaction¹²⁾ and the same effective charges, are given in paranthesis in fig. 6. This comparison of the Kuo values with those of the $\text{SU}(3)$ -model is of interest with regard to the approximate $\text{SU}(3)$ -symmetry, found for the central part of the Kuo matrixelements in ref. 1. The agreement with the results of the pure $\text{SU}(3)$ -model indicates, that the Kuo-matrixelements generate only small mixings of the $\text{SU}(3)$ basisstates. That means, the $\text{SU}(3)$ breaking components¹⁾ of the Kuo interaction are of minor importance for the nucleus ^{20}Ne and the pure QQ-interaction suffices to give even a quantitative picture of the experimental data. In this connection

+) Care should be taken to speak of rotational bands in the Elliott-model¹⁸⁾.

the $B(E2)$ -value of about $11.9 e^2 fm^4$ for the $0_2 \rightarrow 2_1$ transition is remarkable, because this transition is exactly forbidden in the pure $SU(3)$ -model. This implies either $SU(3)$ impurity or admixture of states with more than one active oscillator-shell.

Turning now to the nucleus ^{24}Mg , we see from fig. 7, that only qualitative features of the experimental spectrum can be described in the $SU(3)$ -model. Those are the appearance of two low lying 2^+ states, not observed for ^{20}Ne , and the appearance of rotational bands. However the fact, that degeneracies occur in the $SU(3)$ spectrum (the 2_1^+ state is doubly, the 4_1^+ and the 6_1^+ state threefold degenerate), can lead to appreciable mixings of $SU(3)$ basisstates (K-mixing) even by small deviations of the effective sd-shell interaction from the QQ-form. This has not been the case for ^{20}Ne . The situation becomes even worse for the case of ^{28}Si . From spectrum (1) of fig. 8 we see, that all states are at least doubly degenerate in the $SU(3)$ -model and therefore effects of $SU(3)$ breaking components are expected to be rather large. This is clearly seen from spectrum (2), where the degeneracies are removed, using the central part of the ASDI-matrixelements, which has been shown to be equivalent to V_c of eq. (8) to a very good approximation. However the number of states of a given J below 7.5 MeV in spectrum (2) can be accounted for by those, already present in spectrum (1). Note that single particle energies as in ref. 4 have been employed to calculate spectrum (2), which further introduce $SU(3)$ breaking components and lead to a mixing of orbital

symmetry classes. However the $SU(3)$ -mixing, caused by the single particle $l \cdot s$ interaction, should be small¹³⁾. For comparison the spectrum, calculated with the total ASDI-matrixelements is also shown. The influence of noncentral forces, contained in the ASDI set, on this nucleus has been reported previously¹⁾.

Let us summarize the conclusions, which can be drawn from the above results, already at this stage. The fact, that the $SU(3)$ -model works for the sd-space is clearly due to the following properties of empirical as well as microscopic effective sd-shell interactions¹⁾:

- (i) the central component dominates over the noncentral ones
- (ii) the central component exhibits an approximate $SU(3)$ -symmetry.

The analytic explanation of the latter point has been given in this paper.

The trouble connected with the degeneracies in the case of ^{24}Mg and ^{28}Si are not present at the beginning of the sd-shell. Therefore the approximation to the effective sd-shell interaction by a QQ-interaction works much better in this region of the sd-shell. However the $SU(3)$ breaking components, generated by central as well as noncentral interactions, become important, as one approaches the middle of the sd-shell, because of degeneracies arising in the $SU(3)$ -classification.

5. Summary and conclusions

Within the sd-modelspace the microscopic approach to the effective interaction as well as an empirical determination of the matrixelements by a fit to experimental data lead to a finite set of two-body matrixelements. From this set the various tensor components can be extracted, using the technique of ref. 7, which has been outlined previously¹⁾. The method described in section 2. allows us to find an analytic expression of a corresponding two-particle interaction, using the reasonable assumption that its tensor-character is the same as known from microscopic NN-potentials. The radial-dependences are determined from an analysis of two-particle matrixelements in momentum space, with the result, that only a few Fouriercomponents are essential because of the limitations imposed on the two-particle transition density by the modelspace. Therefore very schematic radialdependences can be employed which exhibit a very simple structure in momentum space. Their analytic structure follows from properties of the modelspace and the tensor-character of the interaction considered. The free parameters however are characteristic for the chosen set of matrixelements. Of course, the method of section 2 does not necessarily require radialdependences, which are represented by δ -functions (or a superposition of δ -functions) in momentum space. Any other form, which contains the relevant Fouriercomponents with an appropriate strength is equally suited. However the separable central- and tensorinteraction of section 3 have the

advantage, that analytic discussions are facilitated. As an example we note the discussion of the $SU(3)$ invariant component of the central interaction in section 4. Furthermore the effect of varying the Fouriercomponents can be studied transparently, employing a δ -function representation in momentum space. An application to the central-, tensor- and LS-component of the ASDI matrixelements shows:

- 1) The Fouriercomponents found for the central and tensor interaction clearly reflect a long range behaviour. For the tensorforce, however, the higher Fouriercomponents dominate over the lower ones.
- 2) The LS interaction requires high Fouriercomponents due to its short range nature in analogy to the free LS interaction.

In a previous paper¹⁾ the corrections to the ground-state binding energy of ^{28}Si , due to noncentral components of the effective interaction, were found to be mainly due to the LS interaction. This might be connected with the short range nature of the LS-interaction, distinguishing it from central-, tensor- and ALS-components.

The origin of the ALS-component of a such a size as shown in ref. 1, is surely an object of further investigation. In section 3.4 we have seen, that an operator, violating translational invariance, can produce matrixelements of the order, observed for the ASDI matrixelements. Therefore the ALS-component of the effective interaction may be necessary to

correct for the violation of translational invariance in the shell model. The representation of the central-, tensor- and LS-interaction, derived in section 3, exhibits some connection to microscopic invariants and also reflects typical properties of the sd-modelspace. It is an advantage of the explicit representation of the force given in this paper that, when used in sd-shell calculations, the different noncentral components can be varied separately and thus clearly distinguished from each other. A more reliable information on the importance of the noncentral components of the effective sd-shell interaction can be obtained in this way, than it is possible by a free fit of total matrixelements.

- 1) K. Klingenberg, W. Knüpfer, M. G. Huber, F. W. Glaudemans, submitted to Nucl. Phys.
- 2) F. Meurders, F. W. M. Glaudemans, J. F. A. Van Hienen and G. A. Timmer, Z. Phys. (1976) 113
- 3) W. Knüpfer and M. G. Huber, submitted to Phys. Rev. C
- 4) F. W. M. Glaudemans, B. J. Brussard and B. H. Wildenthal, Nucl. Phys. A 102 (1967) 593
- 5) M. Danos and L. C. Maximon, J. Math. Phys. 6 (1965) 766
- 6) M. Moshinsky, Group Theory and the Many Body Problem, in Physics of Many-Particle Systems, ed. E. Meron (Gordon and Breach, New York, 1965)
- 7) M. Harvey, in Advances in Nucl. Phys., Vol. 1 (M. Baranger and E. Vogt, eds.), Plenum Press, New York, 1968
- 8) M. Hamermesh, in Group Theorie and its Application to Physical Problems (Addison-Wesley Publishing Com., Inc. 1962), p. 214
- 9) P. M. Eudt and C. van der Leun, Nucl. Phys. A 214 (1973) 1
- 10) M. Sakai, Institute for Nuclear Study, Tokyo (1973)
- 11) J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A 245 (1958) 562
- 12) E. C. Halbert, J. B. McGrory, B. H. Wildenthal and S. P. Pandya, in Advances in Nucl. Phys., Vol. 4 (M. Baranger and E. Vogt, eds.), Plenum Press, New York 1971
- 13) P. Manakos, private communication

- 14) J. B. McGrory and B. H. Wildenthal, *Thys. Rev.* C 7
(1973) 974
- 15) O. Häusser, T. K. Alexander, A. B. McDonald, G. T. Ewan
and A. E. Litherland, *Nucl. Phys.* A 168 (1971) 17
- 16) T. K. Alexander, O. Häusser, A. B. McDonald, A. J.
Ferguson, W. J. Diamond and A. E. Litherland,
Nucl. Phys. A 150 (1970) 114
- 17) N. Nakai, F. S. Stephens and R. M. Diamond,
Nucl. Phys. A 150 (1970) 114
- 18) J. P. Draayer, D. L. Pursey and S. A. Williams,
Nucl. Phys. A 119 (1968) 577

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. M. G. Huber für die Anregung zu dieser Arbeit; sein engagiertes Interesse und die zahlreichen gemeinsamen Diskussionen waren hilfreiche Faktoren, die Arbeit in der vorliegenden Form fertigzustellen.

Der Studienstiftung des deutschen Volkes möchte ich herzlich danken für die stets wohlwollende Unterstützung, wodurch mir intensives wissenschaftliches Arbeiten ermöglicht wurde.

Lebenslauf

Name:	Klaus Klingenberg
Geburtstag und -ort:	25. 12. 1948, Bayreuth
Eltern:	Heinrich Klingenberg, Karoline Klingenberg, geb. Rosenbaum
Ehefrau:	Brigitte Klingenberg, geb. Engelhardt
Schulbildung:	1. bis 4. Klasse Volksschule, Bayreuth 5. bis 13. Klasse Graf-Münster- Gymnasium, Bayreuth Abitur: 23. Juli 1968
Hochschulstudium:	Vom WS 1968/69 bis SS 1973 Studium der Fächer Mathematik und Physik an der Friedrich-Alexander-Univer- sität Erlangen-Nürnberg
Prüfungen:	Herbst 1970 Vorprüfung zur Wissen- schaftlichen Prüfung für das Lehr- amt an Gymnasien in Mathematik und Physik 13. Oktober 1971 Prüfung in Erziehungswissenschaften Herbst 1973 Staatsexamen in Mathe- matik und Physik 1. Januar 1974 Beginn der Disser- tation am Institut für Theoretische Physik III der Universität Erlangen- Nürnberg
Stipendien:	Studienförderung nach dem Bayeri- schen Begabtenförderungsgesetz Promotionsstipendium der Studien- stiftung des deutschen Volkes

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990